Типовые задачи к зачёту по курсу «Теория случайных процессов»
Осень 2015 г.

1. Задачи по моментным характеристикам случайных процессов, конечномерным распределениям и т. д.

1.1. Найти двумерные распределения процесса $\xi(t) = e^{\alpha t}$, $t > 0$, считая, что случайная величина α равномерно распределена на $[-1, 1]$. Нарисовать типичные траектории процесса.

1.2. Случайная величина τ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. В случайный момент времени $t = \tau$ в цепи загорается (и далее не гаснет) лампочка. Зададим случайный процесс: $\xi(t) = 1$, если в момент времени $t \in [0, 1]$ лампочка горит, и $\xi(t) = 0$, если в момент времени $t \in [0, 1]$ лампочка не горит. Найти двумерное распределение данного случайного процесса.

1.3. Случайный процесс задан как $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $t > 0$, где ω – неслучайная константа, случайные величины A и φ независимы, $MA = m$ $DA = \sigma^2$, а φ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса $\xi(t)$.

1.4. Пусть η – случайная величина с равномерным на отрезке $[0, 1]$ распределением. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, который равен единице, если $\eta > t$, и равен нулю при выполнении противоположного неравенства. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию этого процесса.

1.5. Правильная игральная кость (на каждой из трёх пар параллельных граней сумма очков равна 7) лежит «шестёркой» вверх. В момент времени, который можно считать случайной величиной, равномерно распределённой на отрезке $[0, 1]$, игральную кость один раз переворачивают на одну из соседних граней, равновероятно выбранных наугад. Пусть $\xi(t) = k$, если в момент времени t игральная кость лежит вверх гранью с k очками. Найти $P_k(t) = P(\xi(t) = k)$ для $k = 1, \ldots, 6$ и любого $t \in [0, 1]$.

1.6. В момент времени $t = 0$ из начала координат вправо по числовой прямой начинает движение с постоянной скоростью, равной $v_1 = 1$, первая частица. В момент времени, который можно считать случайной величиной, равномерно распределённой на отрезке $[0, 1]$, из начала координат вправо начинает движение вторая частица. Её скорость равна $v_2 = 2$. Пусть $\xi(t)$ – расстояние между частицами (в абсолютных единицах) в момент времени $t \in [0, 1]$. Найти одномерную функцию распределения данного случайного процесса.

1.7. Случайный процесс задан соотношением $\xi(t) = \alpha t2 + \beta$, $t > 0$, где α и β – независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[-1, 1]$. Найти вероятность того, что $\xi(t) > 0$ при любом $t > 1$.

1.8. Случайный процесс задан соотношением $\xi(t) = \alpha + ct$, $t > 0$, где α – случайная величина с заданной функцией распределения, а c – фиксированная постоянная. Найти вероятность того, что $\xi(t) = 0$ хотя бы при одном $t \in [0, 1]$.

2. Задачи по процессу Пуассона.

2.1. Найти вероятность того, что в пуассоновом потоке требований с интенсивностью λ к моменту времени $3t$ поступит не более трёх требований и к моменту времени t поступит более одного требования.

2.2. Известно, что в пуассоновом потоке требований с интенсивностью λ к моменту времени $2t$ поступило ровно $2n$ требований. При этом условии найти вероятность того, что в промежуток времени $[0, t)$ поступило не более n требований из пуассонова потока.

2.3. Найти вероятность того, что в пуассоновом потоке требований с интенсивностью λ к моменту времени $3t$ поступило не более четырёх требований из потока, а к моменту времени t уже поступило более одного требования.

2.4. Известно, что второе из требований в пуассоновом потоке с интенсивностью $\lambda = 1$ поступило ранее, чем в момент времени $2t$. При этом условии найти вероятность того, что время поступления первого требования из пуассонова потока оказалось больше t.

2.5. Найти вероятность того, что в пуассоновом потоке требований с интенсивностью $\lambda = 1$ первое требование ещё не пришло к моменту времени t, а второе поступило не позже чем в момент времени $2t$.

2.6. Пусть $\xi(t)$, $t > 0$, - пуассонов поток требований с интенсивностью $\lambda > 0$, а случайные величины α и β не зависят от него и друг от друга и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти вероятность того, что в интервале времени (α, β) не не поступит ни одного требования из потока $\xi(t)$.

2.7. По двум каналам связи на телефонную станцию передаётся два независимых пуассоновых потока сообщений, один с интенсивностью три сообщения в минуту, другой – с интенсивностью два сообщения в минуту. Найти вероятность того, что за минуту поступит ровно два сообщения.

2.8. Поток клиентов парикмахерской есть процесс Пуассона с интенсивностью 1 клиент в 10 минут. Время обслуживания клиента есть случайная величина, распределённая по показательному закону. Среднее время обслуживания клиента составляет 30 минут. В начальный момент времени в парикмахерской нет клиентов. Найти вероятность того, что второй клиент встретит отказ в связи с тем, что мастер занят с первым клиентом.

2.9. Телеграфный процесс определяется как случайный процесс $\xi(t)$, $t > 0$, у которого каждое сечение имеет распределение $P(\xi(t) = 1) = P(\xi(t) = -1) = 1/2$, а количество перемен знака на интервале $[0, t)$ есть пуассонов поток требований с интенсивностью λ. Найти ковариационную функцию телеграфного процесса.

3. Задачи по цепям Маркова и марковским процессам.

3.1. Цепь Маркова имеет два состояния. Распределение на первом шаге задаётся начальными вероятностями $a_1 = 1/3$, $a_2 = 2/3$. Матрица перехода за один шаг имеет вид $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$. Найти распределение на третьем шаге.

3.2. Матрица перехода за один шаг в цепи Маркова имеет вид $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$. Найти финальные вероятности.

3.3. В правильной игральной кости сумма очков на противоположных гранях во всех трёх случаях равна 7. В начальный момент времени игральная кость лежит на грани с «шестёркой». В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ кость переворачивают на одну из четырёх соседних граней. Найти распределение вероятностей положений кости в результате второго поворачивания. Найти стационарное распределение в такой модели.

3.4. Дана матрица переходных вероятностей системы за один шаг и начальные вероятности цепи Маркова:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} P(\xi_1 = 1) = 0.1, \\ P(\xi_1 = 2) = 0.4, \\ P(\xi_3 = 3) = 0.5 \end{array}$$

Найти вероятность $P(\xi_1 = 3, \xi_2 = 1, \xi_4 = 2)$.

3.5. Заданы матрица переходных вероятностей системы за один шаг и начальные вероятности цепи Маркова:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} P(\xi_1 = -1) = 0.5, \\ P(\xi_1 = 1) = 0.5. \end{array}$$

Найти условное распределение случайной величины ξ_2 при условии $\xi_3 = x_2$. Найти коэффициент ковариации двух случайных величин ξ_1 и ξ_3.

3.6. Заданы матрица переходных вероятностей системы за один шаг и начальные вероятности цепи Маркова:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} P(\xi_1 = 0) = 0.2, \\ P(\xi_1 = 1) = 0.4, \\ P(\xi_1 = 2) = 0.4. \end{array}$$

Найти вероятность того, что $\xi_2 < \xi_3$.

3.7. Система может находиться в одном из двух состояний. Вероятность перехода за малое время Δt из первого состояния x_1 во второе состояние x_2 равна $a\Delta t + o(\Delta t)$, вероятность перехода из x_2 в x_1 равна $b\Delta t + o(\Delta t)$. В начальный момент времени система находилась в первом состоянии (с вероятностью единица). Считая переходы системы марковским процессом, найти $p_k(t) = P(\xi(t) = x_k)$ для любого $t > 0$ и$k = 1, 2$ и предел этих вероятностей при $t \to +\infty$.

3.8. Матрица Λ в системе уравнений Колмогорова имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти стационарное (т. е. не меняющееся со временем) распределение такого марковского процесса.

4. Задачи по случайным блужданиям.

4.1. Частица совершает случайные скачки единичной длины по целочисленным точкам действительной прямой, прыгая направо с вероятностью p и налево – с вероятностью q, $p + q = 1$. В момент времени $t = 0$ частица находилась в точке $x = 0$. Найти вероятность того, что в момент времени $t = 8$ частица окажется в точке с координатой $x = 4$, если известно, что за три шага отошла от нуля не больше чем на 1 в любом направлении.

4.2. Для симметричного случайного блуждания, которое начинается из нуля, найти дисперсию координаты частицы на третьем шаге.

4.3. В первом ящике лежат два шара, во втором – двадцать. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ выбирают наугад один из ящиков, вынимают один шар и перекладывают в другой ящик. Если в какой-то момент любой из ящиков оказался пуст, перекладывания прерывают. Найти вероятность того, что пятое перекладывание удастся совершить.

4.4. Имеются два ящика, в в каждом из которых лежит по двадцать шаров. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ выбирают наугад один из ящиков, вынимают один шар и перекладывают в другой ящик. Найти вероятность того, что в результате шести перекладываний шаров в ящиках осталось поровну, а в результате десятого перекладывания в одном, заранее выбранном и фиксированном, ящике оказалось больше шаров, чем в другом.

4.5. Бросают правильную монету. Игрок перед бросанием обязан иметь хотя бы 1 руб., чтобы участвовать в игре. Если выпадает «орёл», игрок получает 1 руб.; если выпадает «решка», то платит 1 руб. В начале игры у игрока был 1 руб. Найти вероятность того, что в результате пятого бросания монета у игрока будет более 3 руб. (и он каждый раз имел деньги, чтобы сделать ставку).

4.6. Бросают правильную монету. Если выпадает «орёл», то игрок A платит 1 руб. игроку B; если выпадает «решка», то игрок B платит 1 руб. игроку A. В начале игры у A было 10 руб., капитал игрока B неограничен. Найти вероятность того, что за двадцать бросаний монеты игрок A не разорится (у него останутся деньги), но его капитал в результате двадцатого бросания будет меньше 5 руб.

4.7. Для случайного блуждания, которое задано вероятностями скачков вправо (p) и влево (q) и начинается из нуля, доказать, что математическое ожидание координаты частицы на n-м шаге равно $n(p - q)$ (указание: использовать математическую индукцию).

4.8. Для случайного блуждания, которое задано вероятностями скачков вправо (p) и влево (q) и начинается из нуля, найти вероятность того, что частица за $2n$ шагов придёт в точку с координатой $2d$, $0 \leqslant 2d < 2n$, ни разу не зайдя в точки с (строго) отрицательными координатами (указание: перейти к процессу $\tilde{\xi}(t) = \xi(t) + 1$).

5. Задачи по винеровскому процессу.

5.1. Пусть $\xi(t)$, $t > 0$, – винеровский процесс с нулевым средним. Показать, что,

$$M\left\{\sum_{k=1}^{n}\Big[\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})\Big]2 - (b-a)\right\}^2 \to 0, \qquad n \to \infty,$$

где $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ и $\max -k(t_k - t_{k-1}) \to 0$ при $n \to \infty$.

5.2. Пусть $\xi(t)$, $t > 0$, – винеровский процесс с нулевым средним и $\sigma^2 = 1$. Найти условную дисперсию процесса в момент времени t при условии, что $\xi(2t) = 0$.

5.3. Две независимые броуновские частицы совершают блуждание по прямой, описывающееся винеровскими процессами с нулевым средним и $\sigma^2 = 1$. Для обеих частиц блуждание начинается из нуля. Найти математическое ожидание (абсолютного) расстояния между частицами.

5.4. Броуновская частица начинает случайное блуждание по прямой из точки с координатой ноль, описывающееся винеровским процессом с нулевым средним и $\sigma^2 = 1$. Найти вероятность того, что в моменты времени t и $2t$ она находилась справа от нуля и в момент времени t она была дальше от нуля, чем в момент времени $2t$.

5.5. Броуновская частица начинает случайное блуждание по прямой из точки с координатой ноль, описывающееся винеровским процессом с нулевым средним и $\sigma^2 = 1$. Найти вероятность того, что её кординаты $\xi(t)$ и $\xi(2t)$ в моменты времени t и $2t$ удовлетворяют неравенству $|\xi(t) - \xi(2t| < a$, если известно, что $|\xi(t)| < a$.

5.6. Случайный процесс $\xi(t)$, $t > 0$, задан равенством $\xi(t) = at + w(t)$, где $a = \mathrm{const}$ и $w(t)$, $t > 0$, есть винеровский процесс с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 t$. Найти двумерную плотность распределения процесса $\xi(t)$, $t > 0$.

5.7. Случайный процесс (броуновский мост) $\xi(t)$, $0 < t < 1$, имеет одномерную плотность распределения вида

$$p(x,t) = V(x,t\,|\,x_1,t_1)\Big|_{x_1=0,\,t_1=1}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0,1),$$

где $V(x,t\,|\,x_1,t_1)$, $x, x_1 \in \mathbb{R}$, – условная плотность распределения двух сечений $w(t)$ и $w(t_1)$ винеровского процесса с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 1$. Доказать, что ту же плотность имеет случайный процесс $\tilde{\xi} = w(t) - tw(1)$, $0 < t < 1$.

5.8. Две независимые броуновские частицы совершают блуждание по прямой, описывающееся винеровскими процессами с нулевыми средними и дисперсиями σ^2 для первой частицы и $2\sigma^2$ для второй частицы. Для обеих частиц блуждание начинается из нуля. Найти вероятность того, что первая частица достигнет точки с координатой $a > 0$ раньше, чем вторая.

Примечание: решения задач выразить через элементарные функциях и/или через функцию (интеграл вероятности)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, dz, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

или, если это невозможно, записать в <u>однократных</u> (повторных) интегралах.

6. Задачи по стационарным процессам.

6.1. Пусть $\xi(t)$, $t > 0$, – процесс Пуассона. Является ли процесс $\eta(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$, $t > 0$, стационарным (в широком смысле); здесь $T > 0$ фиксировано?

6.2. Пусть $\xi_1(t_n)$ и $\xi_2(t_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, два независимых друг от друга стационарных случайных процесса с дискретным временем. Пусть $F_k(\cdot)$ – спектральные функции процессов $\xi_k(t_n)$, $n \in \mathbb{Z}$ (для $k = 1, 2$). Показать, что процесс $\eta(t_n) = \big(\xi_1(t_n) + \xi_2(t_n)\big)/2$, $n \in \mathbb{Z}$, является стационарным, и найти его спектральную функцию.

6.3. Стационарная случайная последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ есть дискретный белый шум. Последовательность $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ задаётся равенством $\eta_n = a\eta_{n-1} + \varepsilon_n$, где a – фиксированное действительное число, $|a| < 1$. Показать, что $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – стационарная случайная последовательность, и найти её ковариационную функцию.

6.4. Стационарная случайная последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ имеет спектральную плотность, заданную как $f(\lambda) = (1 + \cos\lambda)/2\pi$, $-\pi \leqslant \lambda < \pi$. Найти коэффициенты a_0, a_1, при которых случайная величина $\hat{\xi}_{n+1} = a_0\xi_n + a_1\xi_{n-1}$ является наилучшим в среднем квадратичном смысле приближением случайной величины ξ_{n+1} в классе всех приближений такого вида.

6.5. Ковариационная функция стационарной случайной последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ задаётся следующим образом: $R(n) = 3$ при $n = 0$, $R(n) = 1$ при $|n| = 2$, $R(n) = 0$ при всех прочих n. Найти спектральную плотность следующего линейного преобразования данной случайной последовательности: $\eta_n = 3\xi_n + 2\xi_{n-1} + \xi_{n-2}$.

6.6. Пусть $\xi_n = \theta + \nu_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где θ – неслучайный неизвестный параметр, $\nu_1, \nu_2, \ldots$ – стационарная случайная последовательность, спектральная плотность которой имеет вид $f(\lambda) = (2 + \cos\lambda)/4\pi$, $-\pi \leqslant \lambda < \pi$. Найти такие значения коэффициентов a_n и b_n, что значение $\hat{\theta}_n = a_n\xi_n + b_n\xi_n - 1$ является наилучшей в среднем квадратичном смысле оценкой параметра θ в классе всех оценок такого вида, удовлетворяющих условию несмещённости: $M\hat{\theta}_n = \theta$ для любого значения параметра $\theta \in \mathbb{R}$.

6.7. Ковариационная функция стационарной случайной последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ задаётся следующими равенствами: $R(n) = 2$ при $n = 0$, $R(n) = \pm i$ при $n = \pm 1$ соответственно, $R(n) = 0$ при всех прочих n. Найти спектральную плотность линейного преобразования данной случайной последовательности, которое имеет вид $\eta_n = (\xi_n + \xi_{n-1})/2$.

6.8. Стационарная случайная последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ имеет нулевое среднее и спектральную плотность, заданную как $f(\lambda) = 5 + 4\cos\lambda$, $-\pi \leqslant \lambda < \pi$. Найти наилучший в среднем квадратичном линейный прогноз $\hat{\xi}_{n+1} = a_0\xi_n + a_1\xi_{n-1}$ значения в момент времени t_n по значениям в два предыдущих момента времени.