ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Курс лекций

М. Л. Сердобольская

2014

1. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – некоторое вероятностное пространство. Пусть $\mathbb{T}$ – подмножество действительной прямой.

Определение 1.1. *Случайным процессом* называется семейство случайных величин $\{\xi(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{T}$.

Как обычно в теории вероятностей, мы будем опускать зависимость от элементарного исхода и писать $\xi(t)$ вместо $\xi(\omega, t)$, если эта зависимость не является существенной для наших рассуждений.

Как правило, полагают, что $\mathbb{T} = \{t \geqslant 0\}$, и в этом случае параметру t естественно придать смысл времени. Однако природа множества $\mathbb{T}$ может быть и другой. Поскольку конечное множество $\mathbb{T} = \{t_1, \ldots, t_n\}$ приводит нас к понятию n-мерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k = \xi(t_k)$, и тем самым мы возвращаемся в рамки теории вероятностей, в теории случайных процессов множество $\mathbb{T}$ считается бесконечным. Если множество $\mathbb{T}$ счётно, $\mathbb{T} = \{t_1, t_2, \ldots\}$, то случайный процесс $\xi(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, или *случайной последовательностью*. Во многих физических моделях необходимо принять, что множество $\mathbb{T}$ лежит не на числовой прямой, а в многомерном пространстве, например в обычном трёхмерном евклидовом пространстве. Определение 1.1 в этом случае остаётся без изменений, а случайный процесс $\xi(t)$ обычно называют *случайным полем*, или *случайной функцией*. Поскольку математические основы теории случайных процессов практически не зависят от того, какова размерность множества $\mathbb{T}$, далее мы будем считать, что параметр t – действительное число, более того, выбирать в качестве множества $\mathbb{T}$ либо счётное множество $\{t_1, t_2, \ldots\}$, либо множество $t \geqslant 0$, либо конечный интервал $[0, T]$, $0 < T < \infty$.

Другим направлением обобщений определения 1.1 является изменение размерности пространства значений функции $\xi(\,\cdot\,, t)$, заданной на множестве элементарных исходов Ω: мы можем полагать, что $\xi(\omega, t)$ – точка не на числовой прямой, а в многомерном пространстве. Особенно часто рассматриваются случайные процессы со значениями на комплексной плоскости. В этом случае

$$\xi(t) = \xi^{\mathrm{Re}}(t) + i\xi^{\mathrm{Im}}(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}, \tag{1.1}$$

где $\xi^{\mathrm{Re}}(t)$, $\xi^{\mathrm{Im}}(t)$, $\rho(t)$, $\varphi(t)$ для каждого фиксированного $t \in \mathbb{T}$ суть случайные величины, заданные на Ω, в их стандартном понимании. Далее, ввиду особой важности комплекснозначных (обычно для краткости говорят просто «комплексных») случайных процессов в физике, при формулировке определений и теорем мы, если это необходимо, будем специально оговаривать, о каком процессе, действительном или комплексном, идёт речь.

Введем некоторые термины.

Определение 1.2. Пусть значение параметра $t \in \mathbb{T}$ фиксировано. Случайная величина $\xi_t(\omega) = \xi(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, называется *сечением случайного процесса в точке* t. Пусть элементарный исход $\omega \in \Omega$ фиксирован. Тогда числовая (действительно- или комплекснозначная) функция $\xi_\omega(t)$, $t \in \mathbb{T}$, есть *траектория* (говорят также *реализация*, или *выборочная функция*) случайного процесса.

Обратим внимание на то, что мы обозначаем фиксированные аргументы $t \in \mathbb{T}$ или $\omega \in \Omega$ нижними индексами, чтобы отличать соответственно случайные величины или неслучайные числовые функции от случайного процесса. Мы, как обычно, будем далее опускать зависимость от ω в сечении ξ_t случайного процесса.

Примем ещё одно соглашение об обозначениях. Мы будем часто обозначать как $\xi(t)$ и сечение, и сам случайный процесс, просто оговаривая (если есть риск непонимания природы $\xi(t)$ в каждом конкретном случае), о чём идёт речь; для случайных процессов мы также часто будем указывать, что t не фиксировано, а пробегает некое множество, т. е. писать $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$.

Пример 1.1. Пусть случайный процесс задан формулами (ниже α – случайная величина)

$$\xi(t) = t^\alpha, \qquad P(\alpha = 1) = P(\alpha = -1) = \frac{1}{2}, \qquad t > 0.$$

Определить, как выглядят сечения и траектории данного случайного процесса.

Решение. Фиксируем $t > 0$, получаем дискретную случайную величину ξ_t, равновероятно принимающую два значения:

$$P(\xi_t = t) = P(\xi_t = 1/t) = \frac{1}{2}.$$

Различные сечения случайного процесса суть случайные величины, имеющие распределения, сосредоточенные в двух точках, эти точки зависят от того, какое значение $t > 0$ фиксировано. Заметим, что при $t = 1$ данная случайная величина принимает значение 1 с вероятностью единица, т. е. не является случайной.

Теперь фиксируем элементарный исход ω, другими словами, фиксируем значение случайной величины $\alpha = \alpha(\omega)$. Если элементарный исход ω таков, что $\alpha(\omega) = 1$, то $\xi_\omega(t) = t$, и траектория случайного процесса представляет собой прямую линию. Если же $\alpha(\omega) = -1$, то $\xi_\omega(t) = 1/t$, и траектория случайного процесса – гипербола (оба варианта траектории заданы при $t > 0$).

Отметим также, что данный случайный процесс по сути не является случайным: если в какой-либо момент времени мы находись на траектории, скажем, $\xi(t) = t$, то мы можем с достоверностью утверждать, что во все последующие и предыдущие моменты времени мы этой траектории не покинем. Случайным является только выбор траектории в начальный момент времени.

1.1. Конечномерные распределения случайного процесса.

Определение 1.3. Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, – действительный случайный процесс. Зададим функцию $F_\xi^{(n)} \colon (\mathbb{R} \otimes \mathbb{T})^n \mapsto \mathbb{R}$ равенством

$$\begin{gathered} F_\xi^{(n)}(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = P(\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n), \\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \qquad t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}, \qquad n = 1, 2, \ldots\ . \end{gathered} \tag{1.2}$$

Функция $F_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$ называется *n-мерной функцией распределения случайного процесса $\xi(t)$*.

По сути n-мерная функция распределения случайного процесса $\xi(t)$ – это совместная функция распределения n случайных величин $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$, однако она рассматривается как функция $2n$ аргументов:

• n аргументов $x_1, \ldots, x_n$, каждый из которых произвольно меняется на действительной прямой (эти аргументы по своему смыслу полностью идентичны аргументам обычной совместной функции распределения n случайных величин);

• n аргументов $t_1, \ldots, t_n$, каждый из которых выбирается произвольно в множестве $\mathbb{T}$ (эти аргументы для совместной функции распределения n случайных величин являются параметрами).

Значения функции распределения, как и любая другая вероятность, лежат в отрезке $[0, 1]$.

На практике чрезвычайно редко используются n-мерные функции распределения при $n > 2$, т. е. рассматриваются исключительно одно- и двумерные функции распределения.

Непосредственно из определения (1.2) следует, что n-мерная функция распределения должна удовлетворять следующему условию: если $\{k_1, \ldots, k_n\}$ – произвольная перестановка множества индексов $\{1, \ldots, n\}$, то

$$F(x_{k_1}, t_{k_1}; \ldots; x_{k_n}, t_{k_n}) \equiv F(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n); \tag{1.3}$$

например, $F(x_1, t_1; x_2, t_2) = F(x_2, t_2; x_1, t_1)$ для всех $x_{1,2} \in \mathbb{R}$, $t_{1,2} \in \mathbb{T}$.

Из свойств совместной функции распределения случайных величин вытекают следующие свойства n-мерной функций распределения случайного процесса. Выберем произвольным образом все аргументы x_k, кроме одного, например x_n (как вытекает из предыдущего свойства, номер выделенного аргумента несуществен), и зафиксируем их. Также выберем произвольно и зафиксируем $t_1, \ldots t_n \in \mathbb{T}^n$. Тогда n-мерная функцию распределения $F^{(n)}(\,\cdot\,)$ как функция одной переменной $x_n \in \mathbb{R}$ непрерывна слева в каждой точке $x_n = a$,

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \ldots, x_n, t_n)\big|_{x_n \to a-0} = F^{(n)}(x_1, t_1; \ldots, a, t_n); \tag{1.4}$$

не убывает,

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \ldots, x_n, t_n) \leqslant F^{(n)}(x_1, t_1; \ldots, \tilde{x}_n, t_n), \quad x_n \leqslant \tilde{x}_n; \tag{1.5}$$

удовлетворяет двум предельным свойствам (во втором, разумеется, $n > 1$)

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \ldots, x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n)\big|_{x_n \to -\infty} = 0, \tag{1.6}$$

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \ldots, x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n)\big|_{x_n \to +\infty} = F^{(n-1)}(x_1, t_1; \ldots, x_{n-1}, t_{n-1}), \tag{1.7}$$

где $F^{(n-1)}(\,\cdot\,)$ – $(n-1)$-мерная функция распределения случайного процесса. Напомним, что свойства (1.4)–(1.7) верны при любых фиксированных $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ и $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$. Если же мы «отпустим» все x-переменные и устремим их к $+\infty$, то

$$F^{(n)}(x_1, t_1; \ldots, x_n, t_n)\big|_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots\cdots \\ x_n \to +\infty}} = 1, \qquad t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}. \tag{1.8}$$

Оказывается, что свойства (1.4)–(1.8) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функции $F^{(n)}(\,\cdot\,)\colon (\mathbb{R} \otimes \mathbb{T})^n \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, были конечномерными функциями распределения некоторого случайного процесса (теорема Колмогорова).

Для комплексных случайных процессов (1.1), заданных как $\xi(t) = \xi^{\mathrm{Re}}(t) + i\xi^{\mathrm{Im}}(t)$ или как $\xi(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}$, также можно определить n-мерную функцию распределения. Это будет функция, заданная как совместная функция распределения $2n$ случайных величин

$$\xi^{\mathrm{Re}}(t_1), \ldots, \xi^{\mathrm{Re}}(t_n),\ \xi^{\mathrm{Im}}(t_1), \ldots, \xi^{\mathrm{Im}}(t_n)$$

или

$$\rho(t_1), \ldots \rho(t_n),\ \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n)$$

в зависимости от формы представления комплексного случайного процесса. Свойства (1.4)–(1.8) сохраняют свою силу за исключением того, что перестановка в (1.3), разумеется, должна производиться согласованно в каждом из n наборов аргументов. Приведем для пояснения этого замечания аналог равенства

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2) = F(x_2, t_2; x_1, t_1)$$

для процесса $\xi(t) = \xi^{\mathrm{Re}}(t) + i\xi^{\mathrm{Im}}(t)$:

$$F(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = F(x_2, y_2, t_2; x_1, y_1, t_1),$$

где аргументы функции распределения сгруппированы по три в соответствии с определением

$$F(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = P(\xi^{\mathrm{Re}}(t_1) < x_1, \xi^{\mathrm{Im}}(t_1) < y_1; \xi^{\mathrm{Re}}(t_2) < x_2, \xi^{\mathrm{Im}}(t_2) < y_2).$$

Далее мы часто будем использовать сокращённые обозначения. Во-первых, вместо $x_1, \ldots, x_n$ мы будем писать просто x и аналогично введем многомерную переменную t (размерность этих переменных обязательно равна размерности функции распределения). Во-вторых, мы часто будем опускать нижний индекс ξ в обозначении $F_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$, а также, если мы говорим о функции конкретного фиксированного порядка, не будем писать и верхний индекс, используя для всех функций распределения общее обозначение $F(\,\cdot\,)$:

$$\begin{aligned} &F(x,t) = P(\xi(t) < x), && x \in \mathbb{R}, && t \in \mathbb{T}, \\ &F(x,t) = P(\xi(t_1) < x_1,\, \xi(t_2) < x_2), && x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, && t = (t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Примем ещё одно соглашение. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $t = (t_1, \ldots, t_n)$ – многомерные переменные. Неравенство $x \leqslant \xi(t) < x + dx$ будем понимать как одновременное выполнение неравенств вида $x_k \leqslant \xi(t_k) < x_1 + dx_k$:

$$x \leqslant \xi(t) < x + dx \quad \Longleftrightarrow \big\{x_1 \leqslant \xi(t_1) < x_1 + dx_1, \ldots, x_n \leqslant \xi(t_n) < x_n + dx_n\big\}.$$

При этом, очевидно, $P(x \leqslant \xi(t) < x + dx) = F(x + dx, t) - F(x, t) = d_x F(x, t)$, где $F(\,\cdot\,)$ – n-мерная функция распределения случайного процесса, $d_x F$ – её дифференциал (приращение) по многомерной переменной x.

Определение 1.4. Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, – действительный случайный процесс. Если приращение n-мерной функции распределения $F_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$ по переменной x при любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{T}^n$ имеет вид

$$F_\xi^{(n)}(x + dx, t) - F_\xi^{(n)}(x, t) = p_\xi^{(n)}(x, t)\, dx, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{T}^n, \tag{1.10}$$

то говорят, что случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, имеет *n-мерную плотность распределения* $p_\xi^{(n)}(\,\cdot\,)$. Напомним, что $dx = dx_1 \ldots dx_n$.

Пример 1.2. Пусть случайная величина ν имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, а случайный процесс задан как $\xi(t) = t + \nu$, $t > 0$. Найдем функции распределения данного случайного процесса.

Решение. Имеем для $n = 1$

$$F(x, t) = P(\xi(t) < x) = P(t + \nu < x) = P(\nu < x - t) = F_\nu(x - t),$$

где $F_\nu(\,\cdot\,)$ – функция распределения случайной величины ν, имеющей нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$,

$$F_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

Поскольку случайная величина ν имеет плотность распределения $p_\nu(\,\cdot\,)$, мы можем записать

$$d_x F(x, t) = F_\nu((x + dx) - t) - F_\nu(x - t) = p_\nu(x - t)\, dx,$$
$$p_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad -\infty < z < +\infty.$$

Мы получили, что наш случайный процесс имеет одномерную плотность распределения: $p(x, t) = p_\nu(x - t)$ при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$.

Для $n = 2$ имеем аналогично

$$F(x, t) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2) = P(\nu < x_1 - t_1, \nu < x_2 - t_2).$$

Понятно, что система неравенств $\nu < x_1 - t_1$ и $\nu < x_2 - t_2$ эквивалента неравенству $\nu < x_1 - t_1$, если $x_1 - t_1 < x_2 - t_2$, и неравенству $\nu < x_2 - t_2$, если $x_2 - t_2 < x_1 - t_1$. Другими словами,

$$F(x, t) = P(\nu < x_* - t_*), \qquad x_* - t_* = \min(x_1 - t_1, x_2 - t_2). \tag{1.11}$$

Аналогично, формула

$$F(x, t) = F_\nu(x_* - t_*), \qquad x_* - t_* = \min(x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n),$$

очевидно, задаёт n-мерную функцию распределения нашего случайного процесса.

Вернёмся к $n = 2$ и попробуем найти двумерную плотность распределения:

$$\begin{aligned} d_x F(x, t) &= P(x_1 \leqslant \xi(t_1) < x_1 + dx_1, x_2 \leqslant \xi(t_2) < x_2 + dx_2) = \\ &= P(x_1 - t_1 \leqslant \nu < x_1 + dx_1 - t_1, x +_2 - t_2 \leqslant \nu < x_2 + dx_2 - t_2) = \\ &= P\big(\nu \in [z_1, z_1 + dx_1) \cap [z_2, z_2 + dx_1)\big), \qquad z_1 = x_1 - t_1, \quad z_2 = x_2 - t_2. \end{aligned}$$

Поскольку dx_1 и dx_2 бесконечно малы, интервалы $[z_1, z_1 + dx_1)$ и $[z_2, z_2 + dx_2)$ имеют непустое пересечение, если и только если $z_1 = z_2$. В самом деле, если, скажем, мы имеем $z_1 < z_2$, то, выбирая достаточно малое dx_1, получим $z_1 + dx_1 < z_2$, при этом интервалы пересекаться не будут. Если же $z_1 = z_2 = z$, то рассматриваемое пересечение равно $[z, z + dz)$, где через dz мы обозначили (бесконечно малое) приращение $\min(dx_1, dx_2)$. Отсюда

$$d_x F(x, t) = P(z \leqslant \nu < z + dx) = p_\nu(z)\, dz, \qquad -\infty < z < +\infty,$$

где

$$p_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad z = x_1 - t_1 = x_2 - t_2, \qquad dz = \min(dx_1, dx_2).$$

Таким образом, приращение $d_xF(x,t)$ как функция, заданная в четырёхмерном пространстве (функция от двух двумерных переменных $x = (x_1, x_2)$ и $t = (t_1, t_2)$) отлично от нуля только на трёхмерной гиперплоскости, на которой $x_1 - t_1 = x_2 - t_2$. При этом $d_xF(x,t)$ имеет (первый) порядок малости $dz = \min(dx_1, dx_2)$ и не пропорционально $dx_1\, dx_2$, как это предписано формулой (1.10). Таким образом, двумерная плотность распределения нашего случайного процесса не существует. Тем более не существуют и плотности распределения более высоких размерностей. Очевидно, что при $n > 2$ приращение $d_xF(x,t)$ отлично от нуля только на гиперплоскости размерности $2n - (n-1) = n+1$:

$$d_xF(x,t) = P(z \leqslant \nu < z + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, dz, \qquad z = x_1 - t_1 = \cdots = x_n - t_n,$$

и $dz = \min(dx_1, \ldots, dx_n)$.

1.2. Моментные функции случайного процесса.

Определение 1.5. Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, – действительный случайный процесс. Если при каждом $t \in \mathbb{T}$ существует математическое ожидание случайной величины $\xi(t)$, то функция $m(\cdot)\colon \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$, заданная равенством

$$m(t) = M\xi(t), \qquad t \in \mathbb{T}, \tag{1.12}$$

называется *математическим ожиданием случайного процесса* $\xi(t)$.

Используя определение математического ожидания, запишем явную формулу

$$M\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} x\, dF(x,t), \quad \text{если верно, что} \quad \int_{\mathbb{R}} |x|\, dF(x,t) < \infty, \qquad t \in \mathbb{T}. \tag{1.13}$$

Здесь $F(\,\cdot\,)$ – одномерная функция распределения случайного процесса, а интеграл понимается в смысле Лебега–Стильтьеса. Неравенство (условие абсолютной сходимости интеграла) задаёт условие существования математического ожидания.

Для комплексного случайного процесса математическое ожидание определяется в соответствии со свойством линейности:

$$M\xi(t) = M\big(\operatorname{Re}\xi(t) + i\operatorname{Im}\xi(t)\big) = M\operatorname{Re}\xi(t) + iM\operatorname{Im}\xi(t), \qquad t \in \mathbb{T}, \tag{1.14}$$

при условии, что математические ожидания реальной и мнимой частей случайного процесса существуют. Таким образом определённое математическое ожидание есть функция на $\mathbb{T}$ со значениями на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Очевидно, что если $\bar\xi(t) = \operatorname{Re}\xi(t) - i\operatorname{Im}\xi(t)$ – процесс, комплексно-сопряжённый процессу $\xi(t)$, то $M\bar\xi(t) = \overline{M\xi(t)}$.

Определение 1.6. Пусть $\xi(t)$, $t \in \mathbb{T}$, – комплексный случайный процесс. Если при каждых $t, s \in \mathbb{T}$ существуют математические ожидания $M\xi(t)$ и $M\xi(t)\bar\xi(s)$, то функция $R\colon \mathbb{T} \otimes \mathbb{T} \mapsto \mathbb{C}$, заданная равенством

$$R(t,s) = M\big(\xi(t) - M\xi(t)\big)\overline{\big(\xi(s) - M\xi(s)\big)}, \qquad t, s \in \mathbb{T}, \tag{1.15}$$

называется *ковариационной функцией случайного процесса* $\xi(t)$.

Для действительного случайного процесса определение (1.15) принимает вид

$$R(t,s) = M\big(\xi(t) - M\xi(t)\big)\big(\xi(s) - M\xi(s)\big), \qquad t,s \in \mathbb{T}. \tag{1.16}$$

Выражения в правых частях равенств (1.15) или (1.16) суть коэффициенты ковариации случайных величин $\xi(t)$ и $\xi(s)$. Также их можно переписать как

$$R(t,s) = M\xi(t)\bar{\xi}(s) - M\xi(t)M\bar{\xi}(s), \qquad t,s \in \mathbb{T}, \tag{1.17}$$

в случае действительного процесса $\bar{\xi}(s)$, разумеется, следует заменить на $\xi(s)$.

Положим в предыдущих равенствах $t = s$.

Определение 1.7. Функция $D\colon \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}_+$, заданная формулой

$$D\xi(t) = M\big|\xi(t) - M\xi(t)\big|^2 \overset{\xi(t)=\bar{\xi}(t)}{=\!=} M\big(\xi(t) - M\xi(t)\big)^2, \qquad t \in \mathbb{T}, \tag{1.18}$$

называется *дисперсией случайного процесса* $\xi(t)$.

В последнем определении мы использовали обозначение $\mathbb{R}_+ = \{x \geqslant 0\}$ для положительной части действительной оси, в правой части первого равенства под знаком математического ожидания стоит модуль комплекснозначной функции, а второе равенство даёт определение дисперсии действительного процесса.

Свойства моментных функций случайного процесса вытекают из общих свойств математического ожидания. Мы здесь отметим только несколько из них.

Ковариационная функция удовлетворяет равенству $R(s,t) = \overline{R(t,s)}$, в случае действительного процесса $R(s,t) = R(t,s)$ для любых $t,s \in \mathbb{T}$.

Для любого набора комплексных чисел $z_1,\dots,z_n$ и любых значений $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{T}$ для корреляционной функции (1.15) имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(t_i,t_j) z_i \bar{z}_j \geqslant 0. \tag{1.19}$$

Положим $\xi^\circ(t) = \xi(t) - M\xi(t)$, тогда $\bar{\xi}^\circ(s) = \bar{\xi}(s) - M\bar{\xi}(t) = \overline{\xi(s) - M\xi(s)}$, и мы можем записать

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(t_i,t_j) z_i \bar{z}_j = \sum_{i,j=1}^{n} M\xi^\circ(t_i)\bar{\xi}^\circ(t_j) z_i \bar{z}_j = M\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n} \xi^\circ(t_i)\bar{\xi}^\circ(t_j) z_i \bar{z}_j\Bigg) =$$
$$= M\Bigg(\sum_{i=1}^{n} z_i \xi^\circ(t_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j \bar{\xi}^\circ(t_j)\Bigg) = M\Bigg(\sum_{i=1}^{n} z_i \xi^\circ(t_i) \cdot \overline{\Bigg(\sum_{j=1}^{n} z_j \xi^\circ(t_j)\Bigg)}\Bigg) =$$
$$= M\Bigg|\sum_{i=1}^{n} z_i \xi^\circ(t_i)\Bigg|^2 \geqslant 0.$$

В случае действительного процесса, разумеется, следует заменить комплексные числа $z_1,\dots,z_n$ на действительные, неравенство (1.19) при этом примет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(t_i,t_j) z_i z_j \geqslant 0, \qquad z_1,\dots,z_n \in \mathbb{R}, \quad t_1,\dots,t_n \in \mathbb{T},$$

а его доказательство проводится, как и выше, следует только убрать знаки комплексного сопряжения, а в последнем выражении можно заменить квадрат модуля суммы на просто квадрат суммы.

Из неравенства Чебышёва вытекает, что если дисперсия случайного процесса равна нулю в точке $t \in \mathbb{T}$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant P\big(\big|\xi(t) - M\xi(t)\big| > \varepsilon\big) \leqslant \frac{M\big|\xi(t) - M\xi(t)\big|^2}{\varepsilon} = \frac{D\xi(t)}{\varepsilon} = 0,$$

таким образом, $P\big(\big|\xi(t)-M\xi(t)\big| > \varepsilon\big) = 0$, другими словами, $P\big(\big|\xi(t)-M\xi(t)\big| \leqslant \varepsilon\big) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$, и мы имеем

$$P\big(\big|\xi(t) - M\xi(t)\big| = 0\big) = P\big(\xi(t) = M\xi(t)\big) = 1,$$

то есть при данном t сечение ξ_t случайного процесса по сути не является случайной величиной: оно с вероятностью единица равно константе (величине $M\xi(t)$).

Пример 1.3. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – случайные процессы из примеров 1.1 и 1.2. Найти их математические ожидания и ковариационные функции.

Решение. Имеем для всех $t > 0$

$$P(\xi_1(t) = t) = P(\xi_1(t) = 1/t) = \frac{1}{2}, \qquad M\xi_1(t) = t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} = \frac{t + 1/t}{2};$$

для процесса из примера 1.2

$$M\xi(t) = M(t + \nu) = t + M\nu = t,$$

поскольку t – неслучайный параметр, а случайная величина ν имеет нормальное распределение с параметром $\mu = M\nu = 0$.

Для расчёта ковариационной функции воспользуемся формулой (1.17) в её варианте для действительных процессов:

$$R(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s), \qquad t, s > 0,$$

Получаем для процесса $\xi_1(t)$ следующее: $\xi_1(t)\xi_1(s) = t^\alpha \cdot s^\alpha = (ts)^\alpha$, поэтому

$$M\xi_1(t)\xi_1(s) = M(ts)^\alpha = (ts)^1 \cdot \frac{1}{2} + (ts)^{-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ts + 1/ts}{2}.$$

В результате

$$R(t, s) = \frac{ts + 1/ts}{2} - \frac{t + 1/t}{2}\frac{s + 1/s}{2} = \frac{ts - s/t - t/s + 1/ts}{4}, \qquad t, s > 0.$$

Для процесса $\xi_2(t)$ имеем

$$M\xi(t)\xi(s) = M(t + \nu)(s + \nu) = ts + (t + s)M\nu + M\nu^2 = ts + 1,$$

где мы воспользовались тем, что $M\nu = 0$, $M\nu^2 = D\nu + (M\nu)^2 = D\nu = \sigma^2 = 1$. Отсюда

$$R(t, s) = ts + 1 - ts = 1, \qquad t, s > 0.$$

Таким образом, в данном случае ковариационная функция торжественно равна единице.

Положив $t = s$, получим дисперсии:

$$D\xi_1(t) = \frac{t^2 - 2 + 1/t^2}{4} = \left(\frac{t - 1/t}{2}\right)^2, \qquad D\xi_2(t) = 1, \qquad t > 0.$$

Эти выражения, впрочем, можно было получить и непосредственно, рассчитав дисперсии случайных велчин t^α и $t + \nu$.

Подведём итог. Случайный процесс есть семейство случайных величин, зависящих от параметра t. Как правило, полагают, что этот параметр – действительное число, но возможны и другие способы его задания. Также, как правило, рассматриваются случайные процессы со значениями в поле действительных или комплексных чисел. Выбрав одну случайную величину из этого семейства при заданном значении параметра t, мы получим так называемое сечение случайного процесса в точке t. Конечномерные (n-мерные) распределения случайного процесса суть совместные распределения n случайных величин, представляющих собой сечения случайного процесса в любых точках $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$. Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса рассчитываются как математическое ожидание и дисперсия сечения случайного процесса в каждой точке $t \in \mathbb{T}$. Для их расчёта необходимо знать одномерную функцию распределения. Значение ковариационной функции случайного процесса равно коэффициенту ковариации двух сечений случайного процесса в точках $t, s \in \mathbb{T}$. Для его расчёта необходимо знать двумерную функцию распределения. Свойства функций распределения и моментных функций, а также методы их расчёта и анализа опираются на стандартные утверждения и теоремы теории вероятностей.

2. ПУАССОНОВ ПОТОК СОБЫТИЙ

Рассмотрим некоторые события, каждое из которых может случайным образом произойти или не произойти в любой момент времени $t > 0$. Будем считать, что само событие имеет нулевую длительность. Иногда мы будем называть эти события элементарными, чтобы отличать от других, более сложных, случайных событий, которые будут возникать ниже. Пусть $\xi(t)$ – число событий, произошедших к моменту времени t, т. е. в промежуток времени $[0, t)$, тогда $\eta(t+h, t) = \xi(t+h) - \xi(t)$ – число событий, произошедших в промежуток $[t, t+h)$. Назовём случайную величину $\eta(t+h, t)$ *приращением* случайного процесса $\xi(t)$.

Определение 2.1. Поток случайных событий назовём *пуассоновым*, если приращения $\eta(t+h, t)$ как случайные величины удовлетворяют следующим условиям:

- независимость приращений: для любых $t_1, \ldots, t_n$ таких, что $0 < t_1 < \cdots < t_n$, случайные величины $\eta(t_2, t_1), \ldots, \eta(t_n, t_{n-1})$ независимы;
- однородность потока во времени: распределение приращения как случайной величины $\eta(t+h, t) = \xi(t+h) - \xi(t)$ зависит только от h и не зависит от t, в связи с этим имеет смысл обозначать приращение как $\eta(h) = \xi(t+h) - \xi(t)$ независимо от t;

- редкость событий: при $h \to 0$

$$P(h = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \tag{2.1}$$
$$P(\eta(h) = 1) = \lambda h + o(h), \tag{2.2}$$
$$P(\eta(h) > 1) = o(h), \tag{2.3}$$

  где λ – постоянная величина, $0 < \lambda < \infty$.

Обсудим последнее условие. Запишем очевидное равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\eta(h) = k) = 1,$$

справедливое для любого $h > 0$. При $h = 0$ имеет смысл положить $P(\eta(0) = 0) = 1$, поскольку в промежуток времени длины ноль скорее всего ни одного элементарного события не случится, поэтому в сумме «выживает» одно слагаемое при $k = 0$. Условия (2.1)–(2.3) означают, что при малых положительных h в сумме, кроме первого, присутствует ещё одно слагаемое, которое отвечает событию $\eta(h) = 1$, а события $\eta(t + h, t) > 1$ чрезвычайно редки (имеют вероятность порядка $o(h)$).

Добавим к определению пуассонова потока событий естественное условие

$$P(\xi(0) = 0) = 1 \tag{2.4}$$

(отсчёт количества случайных событий начинается с нуля).

Теорема 2.1. *Пусть поток элементарных случайных событий является пуассоновым, т. е. удовлетворяет условиям независимости приращений, однородности во времени и условиям* (2.1)–(2.4). *Тогда случайная величина $\xi(t)$ при каждом $t > 0$ имеет распределение Пуассона с параметром λt*:

$$P(\xi(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть значение $t > 0$ фиксировано. Выберем произвольное и пока также фиксированное натуральное число $n > 1$. Разобьем промежуток $[0, t)$ точками $t_0, t_1 \dots, t_n$ на n интервалов одинаковой длины:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t, \qquad h = t_j - t_{j-1} = \frac{t}{n} \quad \text{для всех} \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $\eta_j = \eta(t_j, t_{j-1}) = \eta(t_{j-1} + h, t_{j-1})$ – случайная величина, равная количеству элементарных событий, произошедших в промежуток $[t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. В силу условий независимости приращений и однородности потока все случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_n$ независимы и одинаково распределены. В каждый из промежутков $[t_{j-1}, t_j)$ может произойти сколь угодно много событий, другими словами, любая из случайных величин η_j может принимать значения $0, 1, 2, \dots$. Кроме того, очевидно, общее количество элементарных событий в интервале $[0, t)$ есть сумма событий, случившихся в каждом из маленьких интервалов $[t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j.$$

Рассмотрим следующее (не элементарное) событие: если все η_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, не превосходят единицы, то будем говорить, что случилось событие $\mathbf{I}_n$. Его дополнение (хотя бы одна из случайных величин η_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, приняла значение, большее единицы) обозначим через $\mathbf{II}_n$:

$$\mathbf{I}_n = \bigcap_{j=1}^{n} \{\eta_j = 0, 1\}, \qquad \mathbf{II}_n = \bigcup_{j=1}^{n} \{\eta_j > 1\}.$$

Запишем формулу полной вероятности

$$P(\xi(t) = m) = P(\xi(t) = m \,|\, \mathbf{I}_n) P(\mathbf{I}_n) + P(\xi(t) = m \,|\, \mathbf{II}_n) P(\mathbf{II}_n)$$

и найдём входящие в неё вероятности. Имеем в силу (2.3) и $\eta_j = \eta(t_{j-1} + h, t_{j-1})$

$$P(\mathbf{II}_n) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} \{\eta_j > 1\}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} P(\eta_j > 1) = n \cdot o(h) = n \cdot o(t/n).$$

Далее, если реализовалось событие $\mathbf{I}_n$, то в каждом из интервалов $[t_{j-1}, t_j)$ либо произойдёт (ровно) одно элементарное событие ($\eta_j = 1$), либо не произойдёт ни одного элементарного события ($\eta_j = 0$), $j = 1, 2, \ldots, n$. При этом, как мы уже отмечали, случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_n$ независимы и одинаково распределены. Другими словами, имеем схему n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха

$$p_n = P(\eta_j = 1) = \lambda h + o(h) = \lambda t/n + o(t/n) \tag{2.6}$$

(см. условие (2.2)). Итак,

$$P(\xi(t) = m \,|\, \mathbf{I}_n) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Теперь посмотрим, к чему стремится каждая вероятность при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} &P(\mathbf{II}_n) = n \cdot o(t/n) \to 0, \qquad &&P(\xi(t) = m \,|\, \mathbf{II}_n) P(\mathbf{II}_n) \leqslant P(\mathbf{II}_n) \to 0, \\ &P(\mathbf{I}_n) = 1 - P(\mathbf{II}_n) \to 1, \qquad &&P(\xi(t) = m \,|\, \mathbf{II}_n) \to \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где в последнем предельном переходе мы применили теорему Пуассона: в формулах (2.7) и (2.6)

$$C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} \to \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} \qquad \text{при} \qquad n \to \infty, \quad n p_n = \lambda t + n \cdot o(t/n) \to \lambda t.$$

Таким образом,

$$P(\xi(t) = m) = P(\xi(t) = m \,|\, \mathbf{I}_n) P(\mathbf{I}_n) + P(\xi(t) = m \,|\, \mathbf{II}_n) P(\mathbf{II}_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} \cdot 1 + 0.$$

Поскольку выражение в левой части равенства не зависит от n, мы обязаны записать

$$P(\xi(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad m = 0, 1, \ldots \, .$$

Теорема доказана.

Определение 2.2. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, называется *процессом Пуассона*, если он удовлетворяет требованиям независимости приращений, и каждое его приращение распределено по Пуассону: для $t > s > 0$

$$P(\xi(t) - \xi(s) = m) = \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!}\, e^{-\lambda(t-s)}, \qquad m = 0, 1, \ldots .$$

По непрерывности (предельным переходом при $t \to +0$) положим $P(\xi(0) = 0) = 1$.

Непосредственно из определения вытекает, что сечение $\xi(t) = \xi(t) - \xi(0)$ при любом $t > 0$ также распределено по Пуассону:

$$P(\xi(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad m = 0, 1, \ldots .$$

Таким образом, пуассонов поток событий есть процесс Пуассона.

Свойства процесса Пуассона. Сформулируем и докажем несколько важных следствий из определения 2.2.

1. Нетрудно найти n-мерное распределение процесса Пуассона, т. е.

$$P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \ldots, \xi(t_n) = m_n). \tag{2.9}$$

В силу независимости распределения от порядка событий $\xi(t_j) = m_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, мы без ограничения общности можем считать, что $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Далее, поскольку приращение $\xi(t_j) - \xi(t_{j-1})$ распределено по Пуассону, данная случайная величина неотрицательна (т. е. $\xi(t_j) \geqslant \xi_{j-1}$) с вероятностью единица, следовательно, $P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \ldots, \xi(t_n) = m_n) \neq 0$, только если $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_n$. В соответствии с этим введём обозначения (при $n \geqslant 2$)

$$\begin{aligned} &\eta_1 = \xi(t_1), && k_1 = m_1, \\ &\eta_j = \xi(t_j) - \xi(t_{j-1}), && k_j = m_j - m_{j-1}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

При этом в силу независимости приращений случайные величины η_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, независимы и распределены по Пуассону с параметром $\lambda(t_j - t_{j-1})$.

Кроме того, событие $\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \ldots, \xi(t_n) = m_n$ равносильно событию $\eta_1 = k_1, \eta_2 = k_2, \ldots, \eta_n = k_n$. Отсюда

$$\begin{aligned} P(\xi(t_1) = m_1, \xi_2(t_2) = m_2, \ldots, \xi(t_n) = m_n) &= P(\eta_1 = k_1, \eta_2 = k_2, \ldots, \eta_n = k_n) = \\ = P(\eta_1 = k_1) P(\eta_2 = k_2) \ldots P(\eta_n = k_n) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!}\, e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}. \end{aligned}$$

Так выглядит n-мерное распределение процесса Пуассона. Можно привести это выражение к более интересному виду: заметим, что

$$\sum_{j=1}^{n} k_j = \sum_{j=1}^{n} (m_j - m_{j-1}) = m_n, \qquad \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) = t_n, \qquad \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} = e^{-\lambda t_n}$$

и, если положить $p_j = \frac{\lambda(t_j - t_{j-1})}{\lambda t_n}$, то

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1, \qquad \frac{1}{(\lambda t_n)^{m_n}} \prod_{j=1}^{n} (\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{(\lambda t_n)^{k_j}} = \prod_{j=1}^{n} p_j^{k_j}.$$

Поэтому

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} = \frac{(\lambda t_n)^{m_n}}{m_n!} e^{-\lambda t_n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(k_1, k_2, \ldots, k_n), \quad (2.10)$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{k_1! k_2! \ldots k_n!}{m_n!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_1^{k_n} \quad (2.11)$$

есть так называемая полиномиальная вероятность. Она является обобщением биномиальной вероятности $C_m^k p^k q^{m-k}$ на случай, когда в каждом из m независимых испытаний мы имеем не два возможных исхода (успех и неудачу), а исход одного из n типов. При этом $p_1, p_2, \ldots p_n$ задают распределение этих возможных исходов в единичном акте эксперимента ($p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$). Вероятность $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ есть вероятность того, что в m_n независимых испытаниях исход первого типа случится k_1 раз, исход второго типа случится k_2 раз и т. .д. вплоть до того, что исход n-го типа случится k_n раз, при этом $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m_n$, т. е. полное число испытаний. Вероятность $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{p_1,p_2,\ldots,p_n}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ переходит в биномиальную вероятность при $n = 2$.

2. Напрямую из свойств распределения Пуассона получаем, что

$$M\xi(t) = \lambda t, \qquad D\xi(t) = \lambda t.$$

Можно сказать, что λ равно среднему числу элементарных событий в промежутке единичной длительности (при $t = 1$). Параметр λ называется *интенсивностью* процесса Пуассона.

Для расчёта ковариационной функции воспользуемся сначала условием (2.4) и запишем для $t > s$

$$\xi(s) = \xi(s) - \xi(0), \qquad \xi(t) = \xi(t) - \xi(s) + \xi(s) - \xi(0),$$

причём приращения $\alpha = \xi(s) - \xi(0)$ и $\beta = \xi(t) - \xi(s)$ независимы. В результате имеем

$$M\xi(t)\xi(s) = M\alpha(\alpha + \beta) = M\alpha^2 + M\alpha\beta = \big(D\alpha + (M\alpha)^2\big) + M\alpha \cdot M\beta$$

или, возвращаясь к исходным обозначениям и используя выписанные выше выражения для математического ожидания и дисперсии,

$$M\xi(t)\xi(s) = \big(D\xi(s) + M^2\xi(s)\big) + M\xi(s) \cdot M(\xi(t) - \xi(s)) = \\ = \lambda s + (\lambda s)^2 + \lambda s(\lambda t - \lambda s) = \lambda s + \lambda s \cdot \lambda t.$$

Отсюда

$$R(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s) = \lambda s, \qquad t > s.$$

Значения ковариационной функции при $t < s$ получаются взаимной заменой $t \leftrightarrow s$:

$$R(t, s) = \lambda t, \qquad t < s.$$

Два последних выражения можно объединить в одно $R(t, s) = \lambda \min(t, s)$ – так выглядит ковариационная функция процесса Пуассона.

Замечание 2.1. Если (комплекснозначный) случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, имеет независимые приращения, т. е. для любых $0 < t_1 < \cdots < t_n$ случайные величины $\xi(t_2)-\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ независимы, и случайный процесс начинается в нуле, т. е. $P(\xi(0) = 0) = 1$, то

$$R(t, s) = D\xi(u)\big|_{u=\min(t,s)}. \tag{2.12}$$

В самом деле, если мы положим $\xi^\circ(t) = \xi(t) - M\xi(t)$ при всех $t \geqslant 0$, то случайный процесс $\xi^\circ(t)$ также будет иметь независимые приращения,

$$M\xi^\circ(t) = M\overline{\xi^\circ(t)} = 0, \qquad D\xi^\circ(t) = M|\xi^\circ(t)|^2 = D\xi(t)$$

и $P(\xi^\circ(0) = 0) = 1$. При $0 < s < t$ мы имеем аналогично предыдущим рассуждениям

$$\begin{aligned} R(t, s) &= M(\xi(t) - M\xi(t))(\,\overline{\xi(s)} - M\overline{\xi(s)}\,) = M\xi^\circ(t)\overline{\xi^\circ(s)} = \\ &= M\big(\xi^\circ(t) - \xi^\circ(s) + \xi^\circ(s) - \xi^\circ(0)\big)\big(\,\overline{\xi^\circ(s)} - \overline{\xi^\circ(0)}\,\big) = \\ &= M(\xi^\circ(t) - \xi^\circ(s)) \cdot M(\,\overline{\xi^\circ(s)} - \overline{\xi^\circ(0)}\,) + M(\xi^\circ(s) - \xi^\circ(0))(\,\overline{\xi^\circ(s)} - \overline{\xi^\circ(0)}\,) = \\ &= 0 + M|\xi^\circ(s)|^2 = D\xi(s). \end{aligned}$$

При $t < s$ мы получаем $R(t, s) = D\xi(t)$. Оба случая объединяются в общую формулу (2.12), справедливую для любого случайного процесса с независимыми приращениями, начинающегося в нуле.

Траектории $\xi_\omega(t)$, $t \geqslant 0$, процесса Пуассона представляют собой кусочно-постоянные функции, выходящие из нуля, $\xi_\omega(0) = 0$, в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$ испытывающие скачок, равный $+1$:

$$\xi_\omega(\tau_k - 0) = k - 1, \qquad \xi_\omega(\tau_k) = k, \qquad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Момент времени $t = \tau_k$ – это время наступления k-го элементарного события. Очевидно, что с вероятностью единица

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots\,.$$

Пример 2.4. Найти распределение случайной величины τ_k.

Решение. Если $\tau_k \geqslant t$, то k-е элементарное событие случилось не раньше чем в момент времени t, следовательно, на промежутке $[0, t)$ произошло строго меньше чем k элементарных событий, $\xi(t) < k$. Наоборот, если $\xi(t) < k$, то k-е элементарное событие случилось позже чем в любой момент времени $t' < t$, следовательно, $\tau_k \geqslant t$. Таким образом, условие $\tau_k \geqslant t$ эквивалентно $\xi(t) < k$, поэтому

$$P(\tau_k \geqslant t) = P(\xi(t) < k) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}.$$

Функция распределения случайной величины τ_k записывается как

$$F_k(t) \stackrel{\text{def}}{=\!=} P(\tau_k < t) = 1 - P(\tau_k \geqslant t) = 1 - P(\xi(t) < k) = P(\xi(t) \geqslant k)$$

или, в явном виде,

$$F_k(t) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \qquad t > 0. \tag{2.13}$$

При этом $F_k(0) = P(\tau_k < 0) = 0$.

Найдём плотность плотность распределения случайной величины τ_k:

$$p_k(t) = \frac{dF_k}{dt}(t) = -\frac{d}{dt} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}.$$

Выделим отдельно первое слагаемое, не содержащее степенной функции, получим

$$\begin{aligned} p_k(t) &= -\frac{de^{-\lambda t}}{dt} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}\right) = \\ &= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} - \sum_{m=1}^{k-1} \lambda \frac{m(\lambda t)^{m-1}}{m!}\, e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Объединяем обратно первый и второй член в правой части,

$$\lambda e^{-\lambda t} + \lambda \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} = \lambda \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t}, \tag{2.14}$$

а в третьем члене делаем тривиальные преобразования и сдвигаем индекс суммирования как $m' = m - 1$,

$$\sum_{m=1}^{k-1} \lambda \frac{m(\lambda t)^{m-1}}{m!}\, e^{-\lambda t} = \lambda \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!}\, e^{-\lambda t} = \lambda \sum_{m'=0}^{k-2} \lambda \frac{(\lambda t)^{m'}}{m'!}\, e^{-\lambda t}. \tag{2.15}$$

Видим что правые части равенств (2.14) и (2.15) различаются только одним слагаемым (при $m = k - 1$ в (2.14)), таким образом,

$$p_k(t) = \lambda \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\, e^{-\lambda t} - \lambda \sum_{m'=0}^{k-2} \lambda \frac{(\lambda t)^{m'}}{m'!}\, e^{-\lambda t} = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda t}. \tag{2.16}$$

В частности, $p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$, и время ожидания первого из элементарных событий имеет экспоненциальное распределение.

Пример 2.5. Показать, что промежутки времени $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ (считаем, что $\tau_0 = 0$ с вероятностью единица и, следовательно, $\Delta\tau_1 = \tau_1$) между последовательными моментами наступления элементарных событий в процессе Пуассона независимы при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ для любого $n > 1$ и каждая из случайных величин $\Delta\tau_k$ имеет экспоненциальное распределение, т. е. её плотность распределения имеет вид $\lambda e^{-\lambda t}$ при $t > 0$.

Решение. Для решения задачи достаточно показать, что для любого выбора значений $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$

$$\frac{P(t_1 \leqslant \Delta\tau_1 < t_1 + \delta t_1,\, t_2 \leqslant \Delta\tau_2 < t_2 + \delta t_2,\, \dots, t_n \leqslant \Delta\tau_n < t_n + \delta t_n)}{\delta t_1 \delta t_2 \dots \delta t_n} \underset{\delta t \to +0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\delta t \to +0}{\longrightarrow} \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda t_k} = \lambda^n e^{t_1 + t_2 + \dots + t_n}, \tag{2.17}$$

где $\delta t = \max\{\delta t_1, \delta t_2, \dots, \delta t_n\}$.

Для простоты рассмотрим сначала случай $n = 2$. Пусть $t_1, t_2 > 0$. Введём обозначения $T_1 = t_1$, $T_2 = t_1 + t_2$. Очевидно, $T_2 > T_1$.

Выберем $\delta t_1 > 0$ настолько малым, что бывыполнялось неравенство $T_1 + \delta t_1 < T_2$ (чтобы точка $t_1 + \delta t_1$ лежала на оси времени между t_1 и $t_1 + t_2$), а $\delta t_2 > 0$ выберем произвольно. Тогда событие $t_1 \leqslant \Delta\tau_1 < t_1 + \delta t_1$, заключающееся в том, что первое из элементарных событий пуассонова потока случилось в интервале $[t_1, t_1 + \delta t_1)$ эквивалентно тому, что в промежуток $[0, T_1)$ элементарных событий не было, а в промежуток $[T_1, T_1 + \delta t_1)$ произошло (ровно) одно элементарное событие. Аналогично $t_2 \leqslant \Delta\tau_2 < t_2 + \delta t_2$ эквивалентно тому, что в промежуток $[T_1 + \delta t_1, T_2)$ элементарных событий не было, а в промежуток $[T_2, T_2 + \delta t_2)$ произошло (ровно) одно элементарное событие. При этом все упомянутые промежутки не пересекаются. Таким образом, в терминах приращений $\eta(t, t+s) = \xi(t+s) - \xi(t)$ процесса Пуассона $\xi(t)$, $t > 0$, мы имеем

$$\begin{aligned}
&P(t_1 \leqslant \Delta\tau_1 < t_1 + \delta t_1, t_2 \leqslant \Delta\tau_2 < t_2 + \delta t_2) = \\
&= P\big\{\eta(T_1) = 0,\, \eta(T_1, T_1 + \delta t_1) = 1,\, \eta(T_1 + \delta t_1, T_2) = 0,\, \eta(T_2, T_2 + \delta t_2) = 1\big\}.
\end{aligned}$$

Приращения независимы и распределены по Пуассону, поэтому

$$\begin{aligned}
P(t_1 \leqslant{}&\Delta\tau_1 < t_1 + \delta t_1, t_2 \leqslant \Delta\tau_2 < t_2 + \delta t_2) = \\
&= P(\eta(T_1) = 0) \cdot P(\eta(T_1, T_1 + \delta t_1) = 1 = 1) \times \\
&\qquad \times P(\eta(T_1 + \delta t_1, T_2) = 0) \cdot P(\eta(T_2, T_2 + \delta t_2) = 1) = \\
&= e^{-\lambda T_1} \cdot (\lambda \delta t_1) e^{-\lambda \delta t_1} \cdot e^{-\lambda(T_2 - T_1 - \delta t_1)} \cdot (\lambda \delta t_2) e^{-\lambda \delta t_2} = \\
&= \lambda^2 e^{T_2 + \delta_2} \cdot \delta t_1 \delta t_2.
\end{aligned}$$

С учётом того, что $T_2 = t_1 + t_2$, поделив на $\delta t_1 \delta t_2$, мы получаем при $\delta t_1, \delta t_2 \to 0$ правую часть формулы (2.17) при $n = 2$.

Обобщение на случай произвольного $n > 1$ очевидно. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$. Введём обозначения

$$T_1 = t_1, \quad T_2 = t_1 + t_2, \quad \dots, \quad T_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n.$$

Для каждого $k = 1, 2, \dots, n-1$ выберем $\delta t_k > 0$ настолько малым, чтобы было выполнено неравенство $T_k + \delta t_k < T_{k+1}$, а $\delta t_n > 0$ выберем произвольно. Положим также $T_0 = 0$ и $\delta t_0 = 0$. Тогда

$$P(t_1 \leqslant \Delta\tau_1 < t_1 + \delta t_1, t_2 \leqslant \Delta\tau_2 < t_2 + \delta t_2, \dots, t_n \leqslant \Delta\tau_n < t_n + \delta t_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \bigl\{P(\eta(T_{k-1} + \delta t_{k-1}, T_k) = 0) \cdot P(\eta(T_k, T_k + \delta t_k) = 1)\bigr\} =$$

$$= \exp\biggl\{-\lambda\biggl(\sum_{k=1}^{n}(T_k - T_{k-1} - \delta t_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n}\delta t_k\biggr)\biggr\} \prod_{k=1}^{n}(\lambda \delta t_k) =$$

$$= \lambda^n e^{T_n + \delta_n} \cdot \delta t_1 \delta t_2 \dots \delta t_n.$$

С учётом того, что $T_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$, мы получаем при $\max\{\delta t_1, \delta t_2, \dots, \delta t_n\} \to 0$ формулу (2.17).

Замечание 2.2. Пусть случайная величина τ имеет экспоненциальное распределение, $p_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$. Найдём условную вероятность $P(t \leqslant \tau < t + s \,|\, \tau \geqslant t)$. Имеем при $t, s > 0$

$$P(t \leqslant \tau < t + s \,|\, \tau \geqslant t) = \frac{P(t \leqslant \tau < t + s,\ \tau \geqslant t)}{P(\tau \geqslant t)} = \frac{P(t \leqslant \tau < t + s)}{P(\tau \geqslant t)}.$$

Находим вероятности

$$P(t \leqslant \tau < t + s) = \int_t^{t+s} \lambda e^{-\lambda u}\, du = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)},$$

$$P(\tau \geqslant t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u}\, du = e^{-\lambda t}.$$

Отсюда

$$P(t \geqslant \tau < t + s \,|\, \tau \geqslant t) = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s}$$

не зависит от t. Другими словами, экспоненциальное распределение не имеет «памяти»: если первое (и, как мы отмечали выше, любое другое) элементарное событие не случилось к моменту времени t, вероятность (условная) того, что оно случится в следующие s единиц времени не зависит от t, т. е. от того, как долго мы ждали наступления этого события.

Пример 2.6. Пусть известно, что в промежутке времени $[0, t)$ произошло ровно n элементарных событий из пуассонова потока, $n > 1$. Выделим каким-либо образом одно из этих элементарных событий. При условии, что к моменту времени t произошло ровно n элементарных событий, найти вероятность того, что выделенное событие случится в промежуток $[0, s)$ при $s < t$.

Решение. Обозначим через $A^*(s)$ событие, заключающееся в том, что выделенное элементарное событие случится в промежуток $[0, s)$. Тогда нам требуется найти

$$P(A^*(s) \,|\, \xi(t) = n) = \frac{P(A^*(s) \cap \{\xi(t) = n\})}{P(\xi(t) = n)}, \quad P(\xi(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}.$$

Далее, разложим событие $A^*(s) \cap \{\xi(t) = n\}$ по полной группе событий $S_n^k(s; t)$, $k = 0, 1, \dots, n$, заключающихся в том, что из n элементарных событий, случившихся в интервале $[0, t)$, ровно k событий произойдёт до момента времени s:

$$S_n^k(s; t) = \{\xi(s) = k,\ \xi(t) - \xi(s) = n - k\}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A^*(s)\cap\{\xi(t)=n\})=\sum_{k=0}^{n}P(A^*(s)\cap\{\xi(t)=n\}\,|\,S_n^k)P(S_n^k)$$

Заметим, что

$$P(A^*(s)\cap\{\xi(t)=n\}\,|\,S_n^k)=\frac{k}{n},$$

потому что, если ровно k событий из n попадают в интервал $[0,s)$, то вероятность того, что наше выделенное элементарное событие окажется среди них, равна отношению числа благоприятных ситуаций (выделенное событие одно из k) к общему числу возможностей (выделенное событие одно из n). Далее, по формулам (2.10), (2.11) при $n=2$

$$P(S_n^k)=P(\xi(s)-\xi(0)=k,\ \xi(t)-\xi(s)=n-k)=\\ =\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k},\qquad p=\frac{\lambda s}{\lambda t},\quad q=1-p=\frac{\lambda(t-s)}{\lambda t}.$$

Таким образом,

$$P(A^*(s)\cap\{\xi(t)=n\})=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,e^{-\lambda t}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}=\\ =P(\xi(t)=n)\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}.$$

При этом

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}=p=\frac{\lambda s}{\lambda t}=\frac{s}{t},$$

поскольку в сумме легко узнать математическое ожидание биномиального распределения, равное np. В результате имеем

$$P(A^*(s)\,|\,\xi(t)=n)=\frac{P(A^*(s)\cap\{\xi(t)=n\})}{P(\xi(t)=n)}=\frac{s}{t}.$$

Пример 2.7. Пусть случайные величины $\alpha_1,\alpha_2\ldots$ независимы и имеют одинаковые математическое ожидание и дисперсию, $M\alpha_j=a$, $D\alpha_j=d^2$. Положим $P(\alpha_0=0)=1$. Определим $N(t)$, $t\geqslant 0$, как процесс Пуассона с интенсивностью λ, причём любое сечение этого процесса и случайные величины $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ будем также считать независимыми. Случайный процесс $\xi(t)$ задан формулой

$$\xi(t)=\sum_{j=0}^{N(t)}\alpha_j,\qquad t\geqslant 0.$$

Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\xi(t)$.

Решение. Возьмём полную группу событий $N(t) = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и разложим одномерную функцию распределения процесса $\xi(t)$ по этой полной группе:

$$F_\xi(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi(t) < x \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\xi(x, t \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n),$$

где через $F_\xi(\,\cdot\,|\, N(t) = n)$ мы обозначили условную (при условии $N(t) = n$) одномерную функцию распределения случайного процесса. Тогда математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$ также разложится в сумму условных математических ожиданий (здесь мы не приводим строгого математического обоснования законности перестановки интеграла и суммы):

$$M\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\xi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\xi(x, t \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} M(\xi(t) \,|\, N(t) = n) P(N(t) = n).$$

Далее, по условию

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}$$

и, самое главное,

$$M(\xi(t) \,|\, N(t) = n) = M\left(\sum_{j=0}^{N(t)} \alpha_j \,\middle|\, N(t) = n \right) = M\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \,\middle|\, N(t) = n \right) =$$
$$= M \sum_{j=0}^{n} \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} M\alpha_j = an, \tag{2.18}$$

где при переходе от условного математического ожидания к безусловному (при переходе на вторую строку формулы) мы воспользовались независимостью случайных величин $N(t)$ и $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$; при этом условная вероятность равна безусловной. Также мы учли, что $M\alpha_j = a$ при $j > 0$ и $M\alpha_0 = 0$. Таким образом,

$$M\xi(t) = a \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t} = a\lambda t = . \tag{2.19}$$

Здесь при вычислении суммы мы использовали тот факт, что она определяет математическое ожидание случайной величины, распределённой по Пуассону с параметром λt.

Для расчёта ковариационной функции мы воспользуемся аналогичным приёмом, но теперь полная группа событий будет связана с возможными значениями двух различных сечений случайного процесса. Кроме того, следует учесть, что приращение $N(t+s) - N(s)$ при $t, s > 0$ распределено по Пуассону и принимает неотрицательные целые значения, следовательно, $N(t+s) \geqslant N(t)$ с вероятностью единица. В соответствии с этим выберем полную группу событий как

$$N(s) = m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad N(t+s) = n + m, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

При этом в силу независимости приращений процесса $N(t)$, $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}P(N(s) = m,\, N(t+s) = n+m) &= P(N(s) - N(0) = m,\, N(t+s) - N(s) = n) = \\ &= P(N(s) - N(0) = m) \cdot P(N(t+s) - N(s) = n) = \\ &= \frac{(\lambda s)^m}{m!}\, e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t} = P_s(m) P_t(n),\end{aligned}$$

в правой части для краткости мы ввели обозначения для пуассоновых вероятностей

$$\begin{aligned}P_s(m) &= P(N(s) = m) = \frac{(\lambda s)^m}{m!}\, e^{-\lambda s},' \\ P_t(n) &= P(N(t) = n) = P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Итак, имеем по аналогии с (2.18)

$$\begin{aligned}&M\xi(s)\xi(t+s) = \\ &\quad= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\sum_{j=0}^{N(s)} \alpha_j \sum_{k=0}^{N(t+s)} \alpha_k \,\middle|\, N(s) = m,\, N(t+s) = n+m\right) \times \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times P(N(s) = m,\, N(t+s) = n+m) = \\ &\quad= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} M \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \sum_{k=0}^{n+m} \alpha_k \cdot P_s(m) P_t(n) = \\ &\quad= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_s(m) P_t(n) \cdot \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n+m} M\alpha_j\alpha_k.\end{aligned}$$

Теперь найдём $M\alpha_j\alpha_k$. Очевидно,

$$M\alpha_j\alpha_k = \begin{cases} M\alpha_j \cdot M\alpha_k, & j \neq k \\ M\alpha_k^2, & j = k \end{cases}$$

и (поскольку неслучайная величина $\alpha_0 = 0$ независима с остальными α_k)

$$M\alpha_j \cdot M\alpha_k = \begin{cases} a^2, & k \neq j, \quad k, j > 0, \\ 0, & k \neq j, \quad k \cdot j = 0, \end{cases} \qquad M\alpha_k^2 = \begin{cases} a^2 + d^2, & k > 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n+m} M\alpha_j\alpha_k &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+m} M\alpha_j\alpha_k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+m} (a^2 + \delta_{jk} d^2) = \\ &= a^2 \cdot m(m+n) + d^2 \cdot m = a^2m^2 + a^2mn + d^2m. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Теперь подставляем полученные выражения в разложение по полной группе событий. Имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} mP_s(m)P_t(n) = \sum_{m=0}^{\infty} mP_s(m) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P_t(n) = \lambda s,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} m^2 P_s(m)P_t(n) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 P_s(m)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} P_t(n) = \lambda s + (\lambda s)^2,$$

где, суммируя по m, мы нашли математические ожидания случайных величин $N(s)$ и $N^2(s)$, а суммируя по n, учли условие нормировки распределения случайной величины $N(t+s)-N(t)$. Наконец,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} mnP_s(m)P_t(n) = \sum_{m=0}^{\infty} mP_s(m)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} nP_t(n) = \lambda s\cdot\lambda t$$

Собираем все полученные результаты (см. правую часть равенства (2.20)):

$$M\xi(s)\xi(t+s) = a^2\big(\lambda s + (\lambda s)^2\big) + a^2\lambda s\cdot\lambda t + d^2\lambda s.$$

Отсюда, принимая во внимание уже найденное математическое ожидание (2.19), получаем

$$\begin{aligned}R(s,t+s) &= M\xi(s)\xi(t+s) - M\xi(s)\cdot M\xi(t+s) = \\ &= a^2\big(\lambda s + (\lambda s)^2\big) + a^2\lambda s\cdot\lambda t + d^2\lambda s - a\lambda s\cdot a\lambda(t+s).\end{aligned}$$

Приведём подобные слагаемые: $R(s,t+s) = \lambda s(a^2+d^2)$. Видно, что значение ковариационной функции определяется значением меньшего из её аргументов, как это бывает у процессов с независимыми приращениями.

В заключение рассмотрим процесс, в некотором роде обратный к процессу Пуассона. Пусть в составе некоторой системы имеется устройство, которое работает в течение случайного времени τ, после чего отказывает. Непосредственно после отказа устройство мгновенно заменяют на аналогичное. Таким образом, время работы системы до n-го отказа есть случайная величина

$$S_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n, \tag{2.21}$$

где τ_k – время работы k-го устройства. Мы будем считать, что случайные величины $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ независимы при любом n и одинаково распределены. Определим случайный процесс $\xi(t)$, $t>0$, формулой

$$\xi(t) = \max\{n \mid \tau_1 + \cdots + \tau_n \leqslant t\}, \qquad t > 0, \tag{2.22}$$

таким образом, $\xi(t)$ – количество отказов, случившихся вплоть до момента времени t. Процесс $\xi(t)$ называется *процессом восстановления*.

Пример 2.8. Пусть в случайном процессе (2.22) случайные величины имеют экспоненциальное распределение с плотностью e^{-x} при $x>0$.

1. Найти математическое ожидание процесса (2.22).

2. Положим $S_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$, как в (2.21), и зададим случайные процессы $V(t)$ и $U(t)$ формулами

$$V(t) = S_{\xi(t)+1} - t, \qquad U(t) = t - S_{\xi(t)}, \qquad t \geqslant 0. \tag{2.23}$$

Найти $P(V(t)>v,\, U(t)>u)$ для $u,v>0$.

3. Найти $MU(t)$.

Решение. Очевидно, что $\xi(t) = 0, 1, 2 \ldots$.

1. Прежде всего отметим, что $\xi(t) = n$ тогда и только тогда, когда $S_n \leqslant t$, $S_{n+1} > t$. Кроме того, $\xi(t) \geqslant m$ эквивалентно $S_m \leqslant t$, поэтому

$$M\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} mP(\xi(t) = m) = \sum_{m=0}^{\infty} m\big\{P(\xi(t) \geqslant m) - P(\xi(t) \geqslant m+1)\big\} = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} m\big\{P(S_m \leqslant t) - P(S_{m+1} \leqslant t)\big\}$$

Для краткости формул введём обозначение $P_m = P(S_m \leqslant t)$, тогда

$$M\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m(P_m - P_{m+1}) = \sum_{m=0}^{\infty} mP_m - \sum_{m=0}^{\infty} mP_{m+1}.$$

Во второй сумме произведём сдвиг индекса $m \mapsto m+1$ и учтём, что слагаемое при $m = 0$ вклада в суммы не даёт, в результате

$$M\xi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} mP_m - \sum_{m=1}^{\infty} (m-1)P_m = \sum_{m=1}^{\infty} P_m = \sum_{m=1}^{\infty} P(S_m \leqslant t).$$

Это общая формула, справедливая при любом распределении случайных величин τ_k. Далее мы получим явный ответ, считая, что τ_k распределены экспоненциально, $p_{\tau_k}(x) = e^{-x}$ при $x > 0$.

Индукцией по n покажем, что в нашем случае плотность распределения $p_n(\,\cdot\,)$ случайной величины S_n имеет вид (2.16) (в нашем случае при $\lambda = 1$)

$$p_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-x}, \quad x > 0, \qquad \text{при всех} \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.24}$$

Пусть $x > 0$. При $n = 1$ мы имеем $S_1 = \tau_1$, следовательно, по условию задачи $p_1(x) = e^{-x}$, и начальное индукционное утверждение выполнено.

Пусть для некоторого n плотность распределения случайной величины S_n имеет вид (2.24). Тогда $S_{n+1} = S_n + \tau_{n+1}$, причём (опять же по условию задачи) случайные величины $S_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ и τ_{n+1} независимы. Тогда функцию распределения случайной величины S_{n+1} можно найти стандартным образом: для $x > 0$

$$F_{n+1}(x) = P(S_n + \tau_{n+1} < z) = \iint\limits_{z+y<x} p_{S_n}(z) p_{\tau_{n+1}}(y)\, dz\, dy = \\ = \iint\limits_{\substack{z+y<x \\ z,y>0}} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-z} \cdot e^{-y}\, dz\, dy = \int_0^x \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-z}\, dz \int_0^{x-z} e^{-y}\, dy.$$

Возьмём только внутренний интеграл,

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-z}(1 - e^{-(x-z)})\, dz = \int_0^x \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-z}\, dz - e^{-x} \int_0^x \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\, dz,$$

и найдём плотность распределения, дифференцируя под знаком интеграла:

$$p_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}F_{n+1}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-x} - \left(-e^{-x}\int_0^x \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\,dz + e^{-x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) =$$

$$= e^{-x}\int_0^x \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\,dz = e^{-x}\cdot\frac{z^n}{n!}\bigg|_0^x = \frac{x^n}{n!}\,e^{-x}, \qquad x > 0.$$

Мы видим, что $p_{n+1}(\,\cdot\,)$ имеет вид (2.24). Формула (2.24) доказана.

Вернёмся к нашей задаче и найдём распределение произвольного сечения случайного процесса $\xi(t)$. По аналогии с формулами, приведёнными выше, запишем

$$P(\xi(t) = n) = P(S_n \leqslant t,\, S_{n+1} > t) = P(S_n \leqslant t,\, S_n + \tau_{n+1} > t) =$$

$$= \iint\limits_{z\leqslant t,\, z+y>t} p_n(z)p_{\tau_{n+1}}(y)\,dz\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\substack{z\leqslant t,\, z+y>t\\ z,y>0}} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-z}\cdot e^{-y}\,dz\,dy = \int_0^t \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-z}\,dz\int_{t-z}^{\infty} e^{-y}\,dy =$$

$$= \int_0^t \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-z}\cdot e^{-(t-z)} = \frac{z^n}{n!}\bigg|_0^t\cdot e^{-t} = \frac{t^n}{n!}\,e^{-t}.$$

Таким образом, $\xi(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром t, следовательно, $M\xi(t) = t$.

2. Для решения второй части задачи вновь используем разложение по полной группе событий, в данном случае по $\xi(t) = n$, $n = 0, 1, \ldots$. Если $\xi(t) = n$, то

$$V(t) = S_{\xi(t)+1} - t = S_{n+1} - t, \qquad U(t) = t - S_{\xi(t)} = t - S_n.$$

Тогда с учётом того, что $P(\xi(t) = n) = P(S_n \leqslant t,\, S_{n+1} > t)$, мы имеем разложение (в данном случае даже без использования условных вероятностей)

$$P(V(t) > v,\, U(t) > u) = \sum_{n=0}^{\infty} P(V(t) > v,\, U(t) > u, \xi(t) = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_{n+1} - t > v,\, t - S_n > u,\, S_n \leqslant t,\, S_{n+1} > t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leqslant t,\, S_n < t - u,\, S_{n+1} > v + t,\, S_{n+1} > t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n < t - u,\, S_{n+1} > v + t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n < t - u,\, S_n + \tau_{n+1} > v + t).$$

Вновь сводя вычисление вероятности к интегрированию, получаем

$$P(S_n < t - u,\, S_n + \tau_{n+1} > v + t) = \iint\limits_{\substack{z<t-u,\, z+y>v+t\\ z,y>0}} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-z}\cdot e^{-y}\,dz\,dy =$$

$$= \int_0^{t-u} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-z}\, dz \int_{v+t-z}^{\infty} e^{-y}\, dy = \int_0^{t-u} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-z}\, e^{-(v+t-z)}\, dz =$$
$$= e^{-(v+t)} \int_0^{t-u} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\, dz = e^{-(v+t)}\, \frac{(t-u)^n}{n!}.$$

Таким образом,

$$P(V(t) > v,\, U(t) > u) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(v+t)}\, \frac{(t-u)^n}{n!} = e^{-(v+t)} \cdot e^{t-u} = e^{-(u+v)} = e^{-u} \cdot e^{-v}.$$

Мы получили, что случайные величины $V(t)$ и $U(t)$ независимы.

Более того, одномерная плотность распределения случайного процесса $U(t)$ задаётся формулами

$$p_U(u,t)\, dt = P(u < U(t) \leqslant u + du) = P(U(t) > u) - P(U(t) > u + du) =$$
$$= e^{-u} - e^{-(u+du)} = e^{-u}\, du, \qquad u > 0,$$

другими словами, случайная величина $U(t)$, как и $\tau_1, \tau_2 \ldots$, имеет экспоненциальное распределение, $p_U(u,t) = e^{-u}$ при $u > 0$.

3. Используя последнюю формулу, получим $MU(t) = 1$.

3. КОНЕЧНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ с дискретным временем $t \in \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$. Для краткости обозначений положим $\xi_n = \xi(t_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ (напомним, случайный процесс с дискретным временем можно понимать и как случайную последовательность). Будем полагать, что любая из случайных величин ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, распределена дискретно и принимает значения из одного и того же множества $\{x_1, \ldots, x_s\}$; в большинстве случаев мы будем считать, что $2 \leqslant s < \infty$.

3.1. Определение цепи Маркова. Свойства матриц перехода.

Определение 3.1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ (или, что эквивалентно, случайная последовательность $\xi_n = \xi(t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$), со значениями в множестве $\{x_1, \ldots, x_s\}$ называется *однородной цепью Маркова*[1], если его конечномерные распределения задаются следующим образом:

$$n = 1: \quad P(\xi_1 = x_i) = a_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, s, \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i = 1; \tag{3.1}$$

$$n > 1: \quad P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n}) = a_{i_1} \pi_{i_1 i_2} \ldots \pi_{i_{n-1} i_n}, \tag{3.2}$$

где π_{ij} – некоторые числа, $i, j = 1, \ldots, s$; здесь значения $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ выбраны произвольным образом.

[1]) Смысл термина «однородность» будет раскрыт далее.

Определение 3.2. Значение x_i назовём i-м *состоянием* цепи Маркова. Если произошло событие $\xi_n = x_i$, то будем говорить, что цепь Маркова на n-м *шаге* пребывала в i-ом состоянии.

Равенства (3.1) задают распределение цепи Маркова на первом шаге, или *начальное распределение*. Видно, что формула (3.1) никак не ограничивает вид этого (дискретного) распределения.

Смысл коэффициентов π_{ij} в (3.2) раскрывают следующие рассуждения. Для $n = 2, 3$ равенства (3.2) принимают вид

$$P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = x_j) = a_i \pi_{ij}, \qquad P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = x_j, \xi_3 = x_k) = a_i \pi_{ij} \pi_{jk},$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \pi_{jk} &= \frac{P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = x_j, \xi_3 = x_k)}{a_i \pi_{ij}} = \frac{P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = x_j, \xi_3 = x_k)}{P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = x_j)} = \\ &= P(\xi_3 = x_k \,|\, \xi_2 = x_j, \xi_1 = x_i). \end{aligned} \tag{3.3}$$

С другой стороны, по определению условной вероятности

$$P(\xi_3 = x_k \,|\, \xi_2 = x_j) = \frac{P(\xi_3 = x_k, \xi_2 = x_j)}{P(\xi_2 = x_j)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = x_j, \xi_3 = x_k)}{\sum\limits_{i=1}^{s} P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = x_j)},$$

где мы разложили события $\{\xi_3 = x_k, \xi_2 = x_j\}$ и $\{\xi_2 = x_j\}$ по полной группе попарно несовместных событий $\{\xi_1 = x_i\}$, $i = 1, \ldots, s$. Подставляя определение (3.2), получаем

$$P(\xi_3 = x_k \,|\, \xi_2 = x_j) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} a_i \pi_{ij} \pi_{jk}}{\sum\limits_{i=1}^{s} a_i \pi_{ij}} = \pi_{jk}. \tag{3.4}$$

Сравнивая формулы (3.3) и (3.4), приходим к выводу, что

$$\pi_{jk} = P(\xi_3 = x_k \,|\, \xi_2 = x_j) = P(\xi_3 = x_k \,|\, \xi_2 = x_j, \xi_1 = x_i).$$

Аналогично, для общих значений $n \geqslant 3$ имеем

$$\begin{aligned} \pi_{i_{n-1} i_n} &= \frac{P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n})}{a_{i_1} \pi_{i_1 i_2} \ldots \pi_{i_{n-2} i_{n-1}}} = \\ &= \frac{P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n})}{P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}})} = \\ &= P(\xi_n = x_{i_n} | \, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_1 = x_{i_1}). \end{aligned}$$

С другой стороны, разлагая по состояниям на шагах с номерами $1, \ldots, n-2$, получаем

$$P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}) = \frac{P(\xi_n = x_{i_n}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}})}{P(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}})} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{(i)=1}^{s} P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n})}{\sum\limits_{(i)=1}^{s} P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}})} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{(i)=1}^{s} a_{i_1}\pi_{i_1 i_2}\ldots\pi_{i_{n-2}i_{n-1}}\pi_{i_{n-1}i_n}}{\sum\limits_{(i)=1}^{s} a_{i_1}\pi_{i_1 i_2}\ldots\pi_{i_{n-2}i_{n-1}}} = \pi_{i_{n-1}i_n},$$

где суммирование по (i) означает $(n-2)$-кратное суммирование по всем индексам $i_1, \ldots, i_{n-2}$, изменяющимся от 1 до s.

Таким образом,

$$P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_1 = x_{i_1}) = P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}) \qquad (3.5)$$

и

$$\pi_{ij} = P(\xi_n = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i), \qquad i,j = 1, \ldots, s, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \qquad (3.6)$$

Условные вероятности (3.6) образуют матрицу π размера $s \times s$, которая называется *матрицей перехода за один шаг.*

Равенство (3.5) часто принимают вместо (3.2) за определение цепи Маркова. Нетрудно доказать, что из (3.5) следует (3.2): в самом деле, из определения условной вероятности следует, что

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n}) = \\ = P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_2 = x_{i_2}, \xi_1 = x_{i_1}) \times \\ \times P(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_2 = x_{i_2}, \xi_1 = x_{i_1}), \end{aligned}$$

а из (3.5) мы имеем

$$P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_2 = x_{i_2}, \xi_1 = x_{i_1}) = P(\xi_n = x_{i_n} \,|\, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}) = \pi_{i_{n-1}i}.$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n}) = \\ = \pi_{i_{n-1}i} P(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_2 = x_{i_2}, \xi_1 = x_{i_1}). \end{aligned}$$

Применяя аналогичные рассуждения к $P(\xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_2 = x_{i_2}, \xi_1 = x_{i_1})$, получаем

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}) = \\ = \pi_{i_{n-2}i_{n-1}} P(\xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \ldots, \xi_2 = x_{i_2}, \xi_1 = x_{i_1}) \end{aligned}$$

и, объединяя две последние формулы, имеем

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \xi_n = x_{i_n}) = \\ = \pi_{i_{n-1}i}\, \pi_{i_{n-2}i_{n-1}} P(\xi_{n-2} = x_{i_{n-2}}, \ldots, \xi_2 = x_{i_2}, \xi_1 = x_{i_1}). \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру до

$$P(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}) = P(\xi_2 = x_{i_2} \,|\, \xi_1 = x_{i_1}) P(\xi_1 = x_{i_1}) = \pi_{i_1 i_2} a_{i_1},$$

в конечном итоге приходим к (3.2).

Отметим, что в (3.6) условные вероятности $P(\xi_n = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i)$ определяются только индексами i, j и не зависят от n, т. е. по сути от момента времени t_n. Такое свойство называется *однородностью* цепи Маркова. Итак, мы рассматриваем однородные цепи Маркова с конечным числом состояний s.

Замечание 3.3. Если случайные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы при любом $n = 2, 3, \ldots$, то условие (3.5), очевидно, выполнено, причём

$$\pi_{ij} = P(\xi_n = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i) = P(\xi_n = x_j), \quad i, j = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.7}$$

и мы видим, что в этом случае элементы матрицы перехода не зависят от первого индекса, т. е. в матрице перехода за один шаг все строки одинаковы (как обычно, считаем, что первый индекс элемента матрицы отвечает номеру строки, а второй — номеру столбца).

Замечание 3.4. Условие (3.5) означает, что если фиксированы состояния на первых $n-1$ шагах, то вероятность на n-м шаге находиться в определённом состоянии зависит (как функция от своих аргументов) только от состояния на предыдущем $(n-1)$-м шаге и не зависит от более ранних состояний. При этом данное условие не влечёт статистическую независимость случайной величины ξ_n от случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}$ — **все шаги цепи Маркова статистически зависимы**.

По аналогии с (3.6) определим *вероятность перехода за $m > 1$ шагов*

$$\pi_{ij}^{(m)} = P(\xi_{n+m} = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.8}$$

и соответствующую *матрицу $\pi^{(m)}$ перехода за m шагов* размера $s \times s$ с элементами (3.8). Тогда последнее замечание можно переформулировать так: в общем случае матрица перехода за m шагов не обязана иметь одинаковые строки.

Докажем несколько утверждений, вытекающих непосредственно из определения цепи Маркова.

1. Очевидно, что, как и любая вероятность, условная вероятность лежит в интервале $[0, 1]$, поэтому

$$0 \leqslant \pi_{ij}^{(n)} \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad i, j = 1, \ldots, s.$$

2. Для любого $m = 1, 2, \ldots$ и всех $i = 1, \ldots, s$

$$\sum_{j=1}^{s} \pi_{ij}^{(m)} = \sum_{j=1}^{s} P(\xi_{m+n} = x_j \,|\, \xi_n = x_i) = \sum_{j=1}^{s} \frac{P(\xi_{m+n} = x_j, \xi_n = x_i)}{P(\xi_n = x_i)} =$$
$$= \frac{1}{P(\xi_n = x_i)} \sum_{j=1}^{s} P(\xi_{m+n} = x_j, \xi_n = x_i) = \frac{P(\xi_n = x_i)}{P(\xi_n = x_i)} = 1$$

в силу того, что последняя сумма отвечает разложению события $\{\xi_{m+n} = x_j\}$ по полной группе событий $\{\xi_n = x_i\}$, $i = 1, \ldots, s$. Последняя цепочка равенств показывает, что сумма элементов в каждой из строк матрицы перехода за m шагов равна 1.

Матрица $\pi^{(n)}$ с неотрицательными элементами, удовлетворяющая условию

$$\sum_{j=1}^{s} \pi_{ij}^{(n)} = 1, \tag{3.9}$$

называется *стохастической*.

Используя матрицу перехода за n шагов, мы можем записать, что вероятность того, что на $(n+1)$-м шаге цепь Маркова окажется в k-м состоянии, равна

$$P(\xi_{n+1} = x_k) = \sum_{j=1}^{s} P(\xi_{n+1} = x_k \,|\, \xi_1 = x_j) P(\xi_1 = x_j) = \sum_{j=1}^{s} a_j \pi_{jk}^{(n)}, \tag{3.10}$$

С другой стороны, в силу (3.2)

$$\begin{aligned} &P(\xi_{n+1} = x_k) = \\ &= \sum_{j=1}^{s} \sum_{j_2=1}^{s} \cdots \sum_{j_{n-1}=1}^{s} P(\xi_1 = x_j, \xi_2 = x_{j_2}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{j_{n-1}}, \xi_{n+1} = x_k) = \\ &= \sum_{j=1}^{s} \sum_{j_1=1}^{s} \sum_{j_2=1}^{s} \cdots \sum_{j_{n-1}=1}^{s} a_j \pi_{jj_1} \pi_{j_1 j_2} \ldots \pi_{j_{n-1}k}, \end{aligned}$$

где мы вновь применили разложение события $\{\xi_{n+1} = x_k\}$ по полной группе событий, образованной всевозможными состояниями цепи Маркова на шагах с номерами $1, \ldots, n-1$. Сравнивая последнее выражение с (3.10), видим, что

$$\sum_{j_0=1}^{s} a_j \pi_{jk}^{(n)} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{j_1=1}^{s} \sum_{j_2=1}^{s} \cdots \sum_{j_{n-1}=1}^{s} a_j \pi_{jj_1} \pi_{j_1 j_2} \ldots \pi_{j_{n-1}k},$$

причём это равенство имеет место при любых начальных вероятностях $a_1, \ldots, a_s$. Положим $a_i = 1$ и $a_{i'} = 0$ при $i' \neq i$. Отсюда получим

$$\pi_{ik}^{(n)} = \sum_{j_1=1}^{s} \sum_{j_2=1}^{s} \cdots \sum_{j_{n-1}=1}^{s} \pi_{ij_1} \pi_{j_1 j_2} \ldots \pi_{j_{n-1}k}. \tag{3.11}$$

Видно, что в правой части мы имеем элемент π_{ik}^{n} матрицы $\pi^n = \pi \ldots \pi$, и мы получаем важнейшее свойство матриц перехода в однородных цепях Маркова.

3. Матрица перехода за n шагов есть n-я степень матрицы перехода за один шаг,

$$\pi^{(n)} = \pi^n \tag{3.12}$$

при любых $n = 1, 2, \ldots$ (для красоты формулы мы положили $\pi = \pi^{(1)}$).

4. С учетом последнего свойства, записав равенства $\pi^{(n+m)} = \pi^{n+m} = \pi^n \cdot \pi^m$, получаем уравнение

$$\pi_{ij}^{(n+m)} = \pi^{(n)} \pi^{(m)}, \tag{3.13}$$

которое связывает различные матрицы в бесконечном семействе матриц перехода $\{\pi^{(n)}\}_{n=\overline{1,\infty}}$ и представляет собой частный случай знаменитого *уравнения Чепмена–Колмогорова.*

3.2. Эргодичность цепи Маркова. Естественно предположить, что система должна «забывать» о своём начальном состоянии в пределе бесконечно большого числа шагов. С точки зрения матриц перехода это означает, что переходная вероятность не должна зависеть от начального состояния при $n \to \infty$.

Определение 3.3. Если для любых $i, j = 1, \ldots, s$ существует предел переходной вероятности

$$p_j = \lim_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)}, \tag{3.14}$$

и величина этого предела не зависит от i, то будем говорить, что у цепи Маркова существуют *финальные вероятности.*

Теорема, в которой формулируется достаточное условие существования финальных вероятностей, называется *теоремой Маркова.* Предпошлём её доказательству техническую лемму, справедливую для любых стохастических матриц.

Лемма 3.1. *Пусть матрица π с неотрицательными элементами удовлетворяет условию стохастичности, т. е. $\sum_{j=1}^{s} \pi_{ij} = 1$ для любого $i = 1, \ldots, s$. Рассмотрим две строки матрицы π с фиксированными номерами α и β. Положим*

$$S^{+}(\alpha, \beta) = \sum_{k\colon\, \pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k} \geqslant 0} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}). \tag{3.15}$$

Имеют место следующие утверждения:
1) $S^{+}(\alpha, \beta) = S^{+}(\beta, \alpha)$;
2) *если найдется номер столбца $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ такой, что $\pi_{ij} \geqslant \delta > 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$, то*

$$S^{+}(\alpha, \beta) \leqslant 1 - \delta. \tag{3.16}$$

Доказательство. Заметим, что

$$S^{+}(\beta, \alpha) = \sum_{k\colon\, \pi_{\beta k} - \pi_{\alpha k} \geqslant 0} (\pi_{\beta k} - \pi_{\alpha k}) = -\sum_{k\colon\, \pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k} \leqslant 0} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}).$$

Понятно, что из суммы можно исключить слагаемые, равные нулю, т. е.

$$S^{+}(\beta, \alpha) = -\sum_{k\colon\, \pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k} < 0} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}). \tag{3.17}$$

Разобьем множество $\{1, \ldots, s\}$ на два подмножества

$$\mathcal{K}^{+} = \bigl\{k\colon \pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k} \geqslant 0\bigr\}, \quad \mathcal{K}^{-} = \bigl\{k\colon \pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k} < 0\bigr\}$$

(вариант разбиения, конечно, зависит от α и β). В этих обозначениях (3.15) и (3.17) запишутся как

$$S^{+}(\alpha, \beta) = \sum_{k\in\mathcal{K}^{+}} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}), \qquad S^{+}(\beta, \alpha) = -\sum_{k\in\mathcal{K}^{-}} (\pi_{\alpha k} - \pi_{\beta k}).$$

Отсюда

$$S^+(\alpha,\beta)-S^+(\beta,\alpha)=\Bigg(\sum_{k\in\mathcal{K}^+}+\sum_{k\in\mathcal{K}^-}\Bigg)(\pi_{\alpha k}-\pi_{\beta k})=\sum_{k=1}^{s}(\pi_{\alpha k}-\pi_{\beta k})=1-1=0$$

в силу стохастичности матрицы π, таким образом, равенство $S^+(\alpha,\beta)=S^+(\beta,\alpha)$ доказано.

Далее,

$$1=\sum_{k=1}^{s}\pi_{\alpha k}=\sum_{k\in\mathcal{K}^+}\pi_{\alpha k}+\sum_{k\in\mathcal{K}^-}\pi_{\alpha k},\qquad \sum_{k\in\mathcal{K}^+}\pi_{\alpha k}=1-\sum_{k\in\mathcal{K}^-}\pi_{\alpha k},$$

следовательно,

$$S^+(\alpha,\beta)=\sum_{k\in\mathcal{K}^+}(\pi_{\alpha k}-\pi_{\beta k})=1-\sum_{k\in\mathcal{K}^-}\pi_{\alpha k}-\sum_{k\in\mathcal{K}^+}\pi_{\beta k}. \tag{3.18}$$

Пусть номер столбца j взят из второго утверждения леммы. Очевидно, что, каков бы ни был этот номер $j\in\{1,\ldots,s\}$, либо $j\in\mathcal{K}^+$, либо $j\in\mathcal{K}^-$. Если $j\in\mathcal{K}^+$, то в силу неотрицательности всех элементов матрицы π имеем

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^+}\pi_{\beta k}\geqslant\pi_{\beta j}\geqslant\delta,\quad \sum_{k\in\mathcal{K}^-}\pi_{\alpha k}\geqslant 0.$$

Если $j\in\mathcal{K}^-$, то наоборот

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^-}\pi_{\alpha k}\geqslant\pi_{\alpha j}\geqslant\delta,\quad \sum_{k\in\mathcal{K}^+}\pi_{\beta k}\geqslant 0.$$

В любом случае в (3.18)

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^-}\pi_{\alpha k}+\sum_{k\in\mathcal{K}^+}\pi_{\beta k}\geqslant\delta.$$

Подставляя эту оценку в (3.18), получаем неравенство (3.16).

Перейдем к теореме Маркова.

Теорема 3.1. *Пусть найдется натуральное число n_0 такое, что матрица перехода $\pi^{(n_0)}$ за n_0 шагов цепи Маркова имеет хотя бы один столбец, не содержащий нулевых элементов. Тогда*:

1) *для любого $j=1,\ldots,s$ существуют финальные вероятности $p_j=\lim_{n\to\infty}\pi_{ij}^{(n)}$, которые не зависят от номера i начального состояния*;

2) *вероятности $p_j\geqslant 0$, $j=1,2,\ldots,s$, образуют распределение, т. е. $\sum_{j=1}^{s}p_j=1$*;

3) *для любого $j=1,2,\ldots,s$ и для любого $m=1,2,\ldots$ имеет место равенство*

$$p_j=\sum_{k=1}^{s}p_k\pi_{kj}^{(m)}; \tag{3.19}$$

4) *финальные вероятности также являются предельными значениями для распределения на n-м шаге,*

$$p_j=\lim_{n\to\infty}P(\xi_n=x_j),\qquad j=1,\ldots,s. \tag{3.20}$$

Доказательство. Для $j = 1, \ldots, s$ ведем обозначения

$$M_j^{(n)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \pi_{ij}^{(n)}, \qquad m_j^{(n)} = \min_{1 \leqslant i \leqslant s} \pi_{ij}^{(n)},$$

тогда для любых $i = 1, 2, \ldots, s$

$$0 \leqslant m_j^{(n)} \leqslant \pi_{ij}^{(n)} \leqslant M_j^{(n)} \leqslant 1. \tag{3.21}$$

Применим к матрице $\pi^{(n+1)}$ уравнение (3.13), получим

$$M_j^{(n+1)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \pi_{ij}^{(n+1)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} \pi_{kj}^{(n)} \leqslant M_j^{(n)} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = M_j^{(n)} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} 1 = M_j^{(n)}$$

в силу стохастичности матрицы перехода за один шаг. Таким образом, для каждого фиксированного $j = 1, \ldots, s$ последовательность $\{M_j^{(n)}\}_{n=\overline{1,\infty}}$ не возрастает и ограничена снизу, следовательно, существует предел $M_j^* = \lim\limits_{n\to\infty} M_j^{(n)}$. Аналогичные рассуждения доказывают, что последовательность $\{m_j^{(n)}\}_{n=\overline{1,\infty}}$ не убывает и существует $m_j^* = \lim\limits_{n\to\infty} m_j^{(n)}$. Очевидно, $M_j^* \geqslant m_j^*$.

Если мы покажем, что два указанных предела совпадают, $m_j^* = M_k^* = p_j$, то в силу (3.21) этого будет достаточно для того, чтобы $p_j = \lim_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)}$.

Рассмотрим матрицу $\pi^{(n+n_0)}$, где n_0 задано в условии теоремы. Имеем

$$M_j^{(n+n_0)} - m_j^{(n+n_0)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \pi_{ij}^{(n+n_0)} - \min_{1 \leqslant i \leqslant s} \pi_{ij}^{(n+n_0)} = \pi_{\alpha j}^{(n+n_0)} - \pi_{\beta j}^{(n+n_0)}, \tag{3.22}$$

где мы обозначили через α номер строки, на которой достигается максимум, и через β — номер строки, на которой достигается минимум (разумеется, номера α, β разные для разных n и j, но до некоторого момента мы считаем n и j фиксированными). Вновь применим уравнение (3.13):

$$\pi_{\alpha k}^{(n+n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n+n_0)} = \sum_{k=1}^{n} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}) \pi_{kj}^{(n)} = \left(\sum_{k\in\mathcal{K}^+} + \sum_{k\in\mathcal{K}^-} \right) (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}) \pi_{kj}^{(n)}, \tag{3.23}$$

где мы воспользовались обозначениями леммы 1, заменив в ней матрицу π на также стохастическую матрицу $\pi^{(n_0)}$, другими словами, в нашем случае

$$\mathcal{K}^+ = \bigl\{k\colon \pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)} \geqslant 0\bigr\}, \qquad \mathcal{K}^- = \bigl\{k\colon \pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)} < 0\bigr\}.$$

Оценим сверху каждую из двух сумм в правой части (3.23). Для $k \in \mathcal{K}^+$ мы имеем оценку $\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)} \geqslant 0$, тогда в силу $\pi_{kj}^{(n)} \leqslant M_j^{(n)}$

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^+} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}) \pi_{kj}^{(n)} \leqslant M_j^{(n)} \sum_{k\in\mathcal{K}^+} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}).$$

Для $k \in \mathcal{K}^-$ множитель $\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}$ отрицателен, поэтому для оценки величины $(\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}) \pi_{kj}^{(n)}$ сверху нам придется оценить множитель $\pi_{kj}^{(n)}$ снизу: $\pi_{kj}^{(n)} \geqslant m_j^{(n)}$. Тогда

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^-} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}) \pi_{kj}^{(n)} \leqslant m_j^{(n)} \sum_{k\in\mathcal{K}^-} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}).$$

Подставим полученные оценки в (3.23) и затем учтем равенство (3.22), в итоге получим

$$M_j^{(n+n_0)} - m_j^{(n+n_0)} \leqslant M_j^{(n)} \sum_{k\in\mathcal{K}^+} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}) + m_j^{(n)} \sum_{k\in\mathcal{K}^-} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}).$$

В обозначениях леммы 1 первая сумма в правой части последнего неравенства есть $S^+(\alpha,\beta)$. Преобразуем вторую сумму аналогично тому, как мы поступали при доказательстве леммы 1:

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^-} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}) = \sum_{k:\, \pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)} \leqslant 0} (\pi_{\alpha k}^{(n_0)} - \pi_{\beta k}^{(n_0)}) =$$
$$= -\sum_{k:\, \pi_{\beta k}^{(n_0)} - \pi_{\alpha k}^{(n_0)} \geqslant 0} (\pi_{\beta k}^{(n_0)} - \pi_{\alpha k}^{(n_0)}) = -S^+(\beta,\alpha) = -S^+(\alpha,\beta),$$

где в последнем равенстве мы учли первое утверждение леммы 1. Таким образом,

$$M_j^{(n+n_0)} - m_j^{(n+n_0)} \leqslant M_j^{(n)} S^+(\alpha,\beta) - m_j^{(n)} S^+(\beta,\alpha) = \bigl(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\bigr) S^+(\alpha,\beta).$$

По условию теоремы в матрице $\pi^{(n_0)}$ найдется столбец, в котором нет нулевых элементов, т. е. при некотором j_0

$$\delta = \min_{1\leqslant i\leqslant s} \pi_{ij_0}^{(n)} > 0. \tag{3.24}$$

Используем оценку (3.16) $S^+(\beta,\alpha) \leqslant (1-\delta)$ и учтем, что $M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \geqslant 0$, получим

$$M_j^{(n+n_0)} - m_j^{(n+n_0)} \leqslant \bigl(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\bigr)(1-\delta). \tag{3.25}$$

Заметим, что в последнем неравенстве уже нет номеров α, β, зависящих от n и j, и мы можем утверждать, что это неравенство верно при всех $n = 1, 2, \ldots$ и $j = 1, \ldots, s$. Перейдем в обеих частях неравенства к пределу при $n \to \infty$ и фиксированном j:

$$M_j^* - m_j^* \leqslant (M_j^* - m_j^*)(1-\delta).$$

Если $M_j^* - m_j^* > 0$, то, сокращая на $M_j^* - m_j^*$, получаем $1-\delta \geqslant 1$, т. е. $\delta \leqslant 0$, что невозможно вследствие (3.24). Поэтому $M_j^* - m_j^* = 0$. Пункт 1 теоремы доказан: существует

$$p_j = \lim_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)}, \qquad j = 1, \ldots, s.$$

Пункты 2, 3 теоремы получаются путём перехода к пределу при $n \to \infty$ в равенствах

$$1 = \sum_{j=1}^{s} \pi_{ij}^{(n)}, \qquad \pi_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}^{(n)} \pi_{kj}^{(m)}$$

соответственно. Пункт 4 также вытекает из предельных соотношений

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_{n+1} = x_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{s} \pi_{ij}^{(n)} P(\xi_1 = x_i) = \sum_{i=1}^{s} p_j a_i = p_j, \qquad j = 1, \ldots, s.$$

Здесь мы учли условие нормировки начального распределения: $\sum_{i=1}^{s} a_i = 1$. Теорема доказана.

Замечание 3.5. Если дополнительно потребовать, чтобы вся матрица $\pi^{(n_0)}$ не содержала нулевых элементов, т. е. $\pi_{ij}^{(n_0)} > 0$ для всех $i, k = 1, \ldots, s$, то

$$\pi_{ij}^{(n_0)} \geqslant \delta = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant s} \pi_{ij}^{(n_0)} > 0,$$

поэтому $m_j^{(n_0)} \geqslant \delta$, следовательно, $m_j^{(n)} \geqslant \delta$ для всех $n > n_0$ в силу неубывания последовательности $\{m_j^{(n)}\}_{n=\overline{1,\infty}}$. Таким образом, $p_j = \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)} \geqslant \delta > 0$ для всех $j = 1, \ldots, s$. Другими словами, все финальные вероятности отличны от нуля.

Замечание 3.6. Равенство (3.19) можно интерпретировать следующим образом: если начальное распределение совпадает с финальным, $a_j = p_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, то это распределение сохраняется на любом шаге цепи Маркова, $P(\xi_n = x_j) = p_j$ для любого $n = 1, 2, \ldots$. Такое распределение называется *стационарным*, и мы получили, что финальное распределение (если оно существует) с необходимостью является стационарным.

Пусть динамика некоторой физической системы происходит по законам цепи Маркова, т. е. в каждый из моментов времени $t = 1, 2, \ldots$ система может находиться в одном из состояний x_j, $j = 1, \ldots, s$, а переходы от одного состояния к другому происходят случайным образом с вероятностями, заданными матрицей π. Зафиксируем некоторое состояние x_j и введем случайную величину $\tau_j^{(n)}$, равную количеству моментов времени из $t = 1, 2, \ldots, n$, в которые система пребывала в состоянии x_j. Тогда $\tau_j^{(n)}/n$ — это доля времени, которое цепь Маркова провела в состоянии x_j. Представим $\tau_j^{(n)}$ в виде

$$\tau_j^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} \chi_j^{(m)}, \qquad \chi_j^{(m)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_m = x_j, \\ 0, & \text{если } \xi_m \neq x_j, \end{cases}$$

другими словами, $\tau_j^{(n)}$ есть количество тех шагов, на которых произошло событие $\xi_m = x_j$. Тогда математическое ожидание случайной величины $\tau_j^{(n)}/n$ равно

$$M\frac{\tau_j^{(n)}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} M\chi_j^{(m)} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P(\xi_m = x_j). \tag{3.26}$$

Покажем, что если $P(\xi_m = x_j) \to p_j$ при $m \to \infty$, то $M\tau_j^{(n)}/n \to p_j$. Для этого воспользуемся следующим простым утверждением математического анализа.

Лемма 3.2. *Пусть последовательность действительных чисел $\{a_m\}_{n=\overline{1,\infty}}$ сходится к a при $m \to \infty$. Тогда*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Выберем произвольное натуральное $m_0 < n$ и запишем цепочку соотношений

$$\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{m=1}^{n}(a_m - a)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{m=1}^{m_0}(a_m - a)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{m=m_0+1}^{n}(a_m - a)\right| = \frac{S_1}{n} + \frac{S_2}{n}. \qquad (3.27)$$

Оценим величины S_2 и S_1, пользуясь сходимостями $a_m \to a$ и $1/n \to 0$ соответственно.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. В силу сходимости $a_m \to a$ найдется номер $m_0 = m_0(\varepsilon)$ такой, что $|a_m - a| < \varepsilon/2$ для всех $m > m_0$. Тогда для любого $n > m_0$ величина S_2 оценивается как

$$S_2 = \left|\sum_{m=m_0+1}^{m}(a_m - a)\right| \leqslant \sum_{m=m_0+1}^{m}|a_m - a| \leqslant (n - m_0)\frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2},$$

поэтому $S_2/n < \varepsilon/2$ при $n > m_0$.

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (3.27). Пусть $S_1 = \left|\sum_{m=1}^{m_0}(a_m - a)\right|$. В силу того что $1/n \to 0$ при $n \to \infty$, найдется номер N_1, для которого $1/n < \varepsilon/2S_1$ при всех $n > N_1$. Заметим, что N_1 зависит только от S_1 и ε. Далее, величина S_1 определяется только номером m_0 (и, разумеется, последовательностью $\{a_m\}_{n=\overline{1,\infty}}$, но ее мы считаем фиксированной), а номер m_0 зависит только от ε. Таким образом, $N_1 = N_1(\varepsilon)$.

Теперь мы должны взять номера n, при которых оба слагаемых в правой части (3.27) малы. Положим $N = \max(N_1, m_0)$. Поскольку N_1 и m_0 зависят только от ε, мы имеем $N = N(\varepsilon)$ Тогда для $n > N(\varepsilon)$

$$\left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \leqslant \frac{S_1}{n} + \frac{S_2}{n} \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $P(\xi_m = x_j) \to p_j$ при $m \to \infty$, тогда $M\tau_j^{(n)}/n \to p_j$.*

Доказательство. Положим в лемме 2 $a_m = P(\xi_m = x_j)$ и $a = p_j = \lim\limits_{m\to\infty} a_m$. Из (3.26) получаем

$$\lim_{n\to\infty} M\frac{\tau_j^{(n)}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}P(\xi_m = x_j) = \lim_{m\to\infty}P(\xi_m = x_j) = p_j. \qquad (3.28)$$

Теорема доказана.

Можно показать, что если цепь Маркова имеет **строго положительные** финальные вероятности, то

$$\frac{\tau_j^{(n)}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} p_j, \qquad (3.29)$$

в этом соотношении имеется в виду сходимость последовательности случайных величин $\tau_j^{(n)}$, $n = 1, 2 \ldots$, по вероятности.

Рассмотрим физическую интепретацию полученных результатов. Предположим, что мы имеем множество (ансамбль) систем, динамика которых происходит по правилам цепи Маркова и определяется матрицей переходных вероятностей. Будем считать, что текущий момент времени достаточно удален от начального, и распределение уже пришло к стационарному: $P(\xi_n = x_j) = p_j$ для каждой из систем. Тогда в частотной интерпретации вероятность p_j примерно равна доле систем, находящихся в данный момент времени в состоянии x_j.

Утверждения (3.28) и (3.29) говорят о том, что *доля времени, которое одна фиксированная динамическая система пребывает в состоянии x_j в процессе своей динамики, приблизительно равна среднему количеству систем в ансамбле, пребывающих в этом состоянии в один фиксированный момент времени.* Это свойство в физике называют эргодичностью, и мы приходим к следующему определению.

Если предельные вероятности существуют и отличны от нуля, то цепь Маркова называется *эргодической.*

Пример 3.9. Пусть $2s$ частиц, из которых s черных и s белых, размещены по s штук в два сосуда А и Б. В каждый момент времени $t = 2, 3, \dots$ в каждом сосуде наугад выбирают по одной частице, после чего выбранные частицы меняют местами. Будем говорить, что $\xi_n = i$, если после обмена в момент времени $t = n$ в сосуде А оказалось ровно i белых частиц, $n = 1, 2, \dots$, $i = 0, 1, \dots, s$. Найдем вероятности перехода за один шаг в данной цепи Маркова.

Пусть в момент времени $t = n$ система находится в состоянии i. Тогда в сосуде А находятся i белых частиц и $n-i$ черных частиц, а в сосуде Б наоборот — $n-i$ белых и i черных частиц. Найдем вероятности тех возможных состояний, которые могут иметь место после обмена частицами.

1. Если мы обменяли белую частицу из сосуда А на черную частицу из сосуда Б, то в сосуде A окажется $i-1$ белых частиц. При этом вероятность вынуть белую частицу из сосуда А равна i/s, а вероятность вынуть черную частицу из сосуда Б равна i/s. Таким образом, вероятность обмена белой частицы на черную равна $(i/s)\cdot(i/s)$.

2. Вероятность обмена черной частицы из сосуда А на белую частицу из сосуда Б, есть $(1-i/s)\cdot(1-i/s)$, при этом после обмена в сосуде А окажется $i+1$ белых частиц.

3. Обмен частицами одного цвета (либо белого, либо черного) происходит, очевидно, с вероятностью $(i/s)\cdot(1-i/s)+(1-i/s)\cdot(i/s)$, при этом число i белых частиц в сосуде А остается неизменным.

Формируем матрицу перехода. Для любых $0 \leqslant i, j \leqslant s$

$$\pi_{ij} = \begin{cases} (i/s)^2, & j = i-1, \\ (1-i/s)^2, & j = i+1, \\ 2(i/s)(1-i/s), & j = i, \\ 0, & |j-i| > 1. \end{cases}.$$

Рассмотренный пример представляет модель смешивания двух несжимаемых жидкостей (модель Бернулли–Лапласа).

Пример 3.10. Показать, что в цепи Маркова события $\xi_{n-1} = x_i$ и $\xi_{n+1} = x_k$ независимы при условии, что произошло событие $\xi_n = x_j$, т. е.

$$P(\xi_{n+1} = x_k, \xi_{n-1} = x_i \,|\, \xi_n = x_j) = P(\xi_{n+1} = x_k \,|\, \xi_n = x_j) \cdot P(\xi_{n-1} = x_i \,|\, \xi_n = x_j).$$

Решение. Запишем цепочку простейших соотношений

$$P(\xi_{n+1} = x_k, \xi_{n-1} = x_i \,|\, \xi_n = x_j) = \frac{P(\xi_{n+1} = x_k, \xi_n = x_j, \xi_{n-1} = x_i)}{P(\xi_n = x_j)} =$$
$$= \frac{P(\xi_{n+1} = x_k \,|\, \xi_n = x_j, \xi_{n-1} = x_i) P(\xi_n = x_j \,|\, \xi_{n-1} = x_i) P(\xi_n = x_j)}{P(\xi_n = x_j)} =$$
$$= P(\xi_{n+1} = x_k \,|\, \xi_n = x_j) P(\xi_{n-1} = x_i \,|\, \xi_n = x_j).$$

Говорят, что при фиксированном настоящем (т. е. при фиксированном состоянии на n-м шаге) прошлое, $(n-1)$-й шаг, и будущее, $(n+1)$-й шаг, цепи Маркова независимы. Полезно сопоставить это факт с общей статистической зависимостью шагов цепи Маркова, если мы не фиксируем «настоящее» (см. замечание 3.4).

4. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – случайный процесс с непрерывным временем. Как и в случае цепей Маркова, будем считать, что каждая из случайных величин $\xi(t)$ принимает значения из некоторого конечного множества $\{x_1, \ldots, x_s\}$.

Определение 4.1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями в множестве $\{x_1, \ldots, x_s\}$ называется *марковским*, если при любых $n = 3, 4, \ldots$ и любых $t_1, t_2, \ldots t_n$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, случайные величины $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ образуют цепь Маркова, т. е. имеет место равенство

$$P(\xi(t_n) = x_{i_n} | \, \xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi(t_1) = x_{i_1}) =$$
$$= P(\xi(t_n) = x_{i_n} \,|\, \xi(t_{n-1}) = x_{i_{n-1}}) = \pi_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \tag{4.1}$$

Зависимость вероятностей перехода $\pi_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$ только от разности времён есть свойство *однородности* марковского процесса во времени. Условные вероятности

$$P(\xi(t+s) = x_j \,|\, \xi(t) = x_i) = \pi_{ij}(s), \qquad i, j = 1, \ldots, s, \tag{4.2}$$

задают на множестве $\mathbb{R}_+ = \{t \geqslant 0\}$ матричнозначную функцию $\pi(\,\cdot\,)$ (переходную вероятность) со значениями в множестве $\mathbb{M}_{s \times s}$ матриц размера $(s \times s)$. Каждая из матриц $\pi(t)$ является стохастической (напомним, матрица с неотрицательными элементами называется стохастической, если сумма элементов в любой её строке равна единице).

По сути марковский процесс есть цепь Маркова, в которой переходы между состояниями происходят не в фиксированные дискретные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$, а через произвольные промежутки $\Delta t > 0$. Наложим дополнительное условие на поведение этой цепи Маркова при $\Delta \to 0$. Будем считать, что элементы матрицы $\pi(t)$ переходных вероятностей при $\Delta t \to +0$ ведут себя следующим образом:

$$\pi_{ij}(\Delta t) \to \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad \text{при} \quad \Delta t \to +0 \tag{4.3}$$

или, в матричной записи, $\pi(\Delta t) \to I$ при $\Delta t \to +0$, где I – единичная $(s \times s)$-матрица. Это условие означает, что, попав в любое состояние x_i, случайный процесс с вероятностью единица остаётся в этом состоянии некоторое положительное время.

Точнее, если случайная величина τ_i равна времени пребывания в i-м состоянии, то $P(\tau_i > 0) = 1$. В соответствии с наложенным требованием положим $\pi(0) = I$.

Для задания марковского случайного процесса (а точнее, для задания любого его конечномерного распределения) достаточно знать переходную вероятность $\pi(t)$ при любом $t > 0$ и начальное распределение (распределение сечения $\xi(0)$):

$$P(\xi(0) = x_i) = a_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, s, \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i = 1$$

Переходные вероятности, разумеется, удовлетворяют всем свойствам, справедливым для матриц перехода в цепях Маркова. Отметим самое важное: уравнение Чепмена–Колмогорова

$$\pi(t+u) = \pi(t)\pi(u), \qquad t, u \geqslant 0. \tag{4.4}$$

В дальнейшем нас будут интересовать аналитические свойства переходной вероятности как матричнозначной функции $\pi(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{M}_s$.

4.1. Система уравнений Колмогорова для матриц перехода.

Лемма 4.3. *Пусть число состояний $s < \infty$. При любом $t \geqslant 0$ матрица $\pi(t)$ имеет ненулевой определитель и, следовательно, невырожденна.*

Доказательство. Заметим, что в силу (4.3) определитель матрицы $\pi(t)$ как сумма произведений её элементов стремится при $t \to +0$ к определителю матрицы I, т. е. к единице. Поэтому найдётся такое $t_0 > 0$, что $\det \pi(h) \neq 0$ при $h < t_0$. Это означает, что матрица $\pi(h)$ невырожденна при достаточно малых h. Далее, для произвольного фиксированного $t > 0$ всегда можно найти такое натуральное n, что $h_n = t/n < t_0$. Тогда по уравнению Чепмена–Колмогорова

$$\det \pi(t) = \det \pi^n(t/n) = \big(\det \pi(h_n)\big)^n \neq 0, \qquad h_n = t/n < t_0.$$

Другими словами, матрица $\det \pi(t)$ невырожденна при любом $t > 0$.

Условимся, что любые матричные равенства мы будем понимать как поэлементные, например

$$\frac{d\pi}{dt} = D(t), \qquad \int_0^s \pi(t)\,dt = V(s)$$

эквивалентно

$$\frac{d\pi_{ij}}{dt} = D_{ij}(t), \qquad \int_0^s \pi_{ij}(t)\,dt = V_{ij}(s) \qquad \text{для всех} \quad i, j = 1, \dots, s.$$

Сначала покажем непрерывность переходной вероятности. Для $t = 0$ непрерывность понимается, конечно же, как непрерывность справа и задана априори условием (4.3):

$$\pi(t) \to \pi(0) \overset{\text{def}}{=\!=} I \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Лемма 4.4. *Матричнозначная функция $\pi(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{M}_s$ непрерывна при всех $t > 0$, т. е. для любого фиксированного $t > 0$*

$$\lim_{h\to+0}\big(\pi(t+h) - \pi(t)\big) = \lim_{h\to+0}\big(\pi(t) - \pi(t-h)\big) = 0,$$

где в правой части равенства 0 *означает матрицу, все элементы которой равны нулю*[2].

Доказательство. Непрерывность справа непосредственно вытекает из уравнения Чепмена–Колмогорова (4.4) и условия (4.3):

$$\pi_{ij}(t+h) - \pi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t)\pi_{kj}(h) - \pi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t)\big(\pi_{kj}(h) - \delta_{kj}\big) \to 0, \quad h \to +0,$$

при любых $i, j = 1, \ldots, s$ для любого фиксированного $t > 0$.

Непрерывность слева также следует из уравнения Чепмена–Колмогорова, но потребуются чуть более сложные рассуждения. Для $0 < h < t$ имеем

$$\pi(t) - \pi(t-h) = \pi(t-h)\big(\pi(h) - I\big),$$

отсюда в силу $0 \leqslant \pi_{ik}(t-h) \leqslant 1$ получаем оценку

$$|\pi_{ij}(t) - \pi_{ij}(t-h)| = \left| \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t-h)\big(\pi_{kj}(h) - \delta_{ij}\big) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik}(t-h)|\pi_{kj}(h) - \delta_{kj}| \leqslant \sum_{k=1}^{s} |\pi_{kj}(h) - \delta_{kj}| \to 0, \quad h \to +0,$$

при любых $i, j = 1, \ldots, s$ для любого фиксированного $t > 0$. Лемма доказана.

Замечание 4.7. При доказательстве этой леммы, а также далее, при доказательстве последующих утверждений, мы самым существенным образом используем конечность множества состояний ($s < \infty$). Это позволяет менять местами знаки предельного перехода и знаки суммирования. Для бесконечного (счётного) числа состояний простые рассуждения, подобные приведённым выше, уже не помогут при доказательстве, но многие утверждения тем не менее останутся верными, возможно, при некоторых дополнительных уловиях.

Введем обозначение $\dot{\pi}(t)$ для матрицы с элементами

$$\dot{\pi}_{ij}(t) = \frac{d\pi_{ij}}{dt}, \qquad i, j = 1, \ldots, s.$$

Лемма 4.5. *Матричнозначная функция* $\pi(\,\cdot\,)$ *имеет правую производную в точке* $t = 0$, *т. е. существует матрица* Λ *размера* $s \times s$ *такая, что*

$$\lim_{h \to +0} \frac{\pi(h) - \pi(0)}{h} = \Lambda. \tag{4.5}$$

Доказательство. Пользуясь непрерывностью $\pi(\cdot)$ как матричнозначной функции на $\mathbb{R}_+$, запишем формулу среднего (мы, разумеется, имеем в виду поэлементное равенство)

$$\pi(t) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \pi(u)\, du \tag{4.6}$$

[2]) Мы не вводим специальных обозначений, отличающих 0 как нулевую матрицу от 0 как число; предполагается, что природа равенства должна сама подсказать, о каком нуле идёт речь.

для любого $t \geqslant 0$. Перепишем это соотношение как

$$\pi(t) = \lim_{h \to +0} \frac{J(t, t+h)}{h}, \qquad J(t, t+h) = \int_t^{t+h} \pi(u)\, du, \qquad i, j = 1, \ldots, s$$

(здесь $t \geqslant 0$ можно рассматривать как фиксированный параметр). Отсюда следует, что

$$\det \pi(t) = \lim_{h \to +0} \frac{\det J(t, t+h)}{h}.$$

В силу того что $\det \pi(t) \neq 0$ при любом $t > 0$, мы имеем $\det J(t, t+h) \neq 0$ при любом $t > 0$ и достаточно малом $h > 0$. Таким образом, для любых $0 < t_1 < t_2$ таких, что разность $t_2 - t_1$ достаточно мала, существует матрица

$$R(t_1, t_2) = J^{-1}(t_1, t_2) = \left(\int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du \right)^{-1}.$$

Выберем (независимо от того, чему равно $h > 0$) и зафиксируем достаточно близкие значения $0 < t_1 < t_2$, чтобы существовала матрица $R(t_1, t_2)$.

Вновь воспользуемся уравнением (4.4) Чепмена–Колмогорова и запишем цепочку матричных равенств

$$\begin{aligned}
\big(\pi(h) - I\big) \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du &= \int_{t_1}^{t_2} \pi(h)\pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \pi(u+h)\, du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du = \int_{t_1+h}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_2} \pi(u)\, du = \\
&= \int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\, du,
\end{aligned}$$

справедливую для любых $0 < t_1 < t_2$ и $0 < h < t_2 - t_1$ при условии достаточной малости разности $t_2 - t_1$. В принятых выше обозначениях

$$\big(\pi(h) - I\big) J(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\, du. \tag{4.7}$$

Отсюда

$$\frac{\pi(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h} \int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \frac{1}{h} \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\, du \right) R(t_1, t_2). \tag{4.8}$$

Отметим, что матрица в правой части равенства не зависит от t_1 и t_2: она равна $(\pi(h) - I)/h$ при любых $0 < t_1 < t_2$, если разность $t_2 - t_1$ достаточно мала, чтобы существовала обратная матрица $R(t_1, t_2)$, а h выбрано меньшим, чем $t_2 - t_1$. Обозначим матрицу в правой части (4.8) через $\Lambda(h)$:

$$\Lambda(h) = \left(\frac{1}{h} \int_{t_2}^{t_2+h} \pi(u)\, du - \frac{1}{h} \int_{t_1}^{t_1+h} \pi(u)\, du \right) R(t_1, t_2).$$

При $h \to +0$ с учетом формул (4.6) для средних значений интегралов в правой части равенства существует

$$\lim_{h \to +0} \Lambda(h) = \big(\pi(t_2) - \pi(t_1)\big) R(t_1, t_2). \tag{4.9}$$

Объединяя все эти соотношения и учитывая, что $I = \pi(0)$, получаем

$$\lim_{h\to+0}\frac{\pi(h)-\pi(0)}{h} = \lim_{h\to+0}\Lambda(h) \overset{\text{def}}{=\!=} \Lambda.$$

Теорема 4.1. *Матрица $\pi(\cdot)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$ и удовлетворяет уравнениям Колмогорова*

$$\dot\pi(t) = \Lambda\pi(t), \tag{4.10}$$

$$\dot\pi(t) = \pi(t)\Lambda. \tag{4.11}$$

Доказательство. Воспользуемся уравнением (4.4). Для произвольного $t > 0$ имеем

$$\frac{\pi(t+h)-\pi(t)}{h} = \frac{\pi(h)-\pi(0)}{h}\pi(t) = \pi(t)\frac{\pi(h)-\pi(0)}{h},$$

откуда

$$\lim_{h\to+0}\frac{\pi(t+h)-\pi(t)}{h} = \Lambda\pi(t) = \pi(t)\Lambda, \tag{4.12}$$

т. е. матрица $\pi(t)$ имеет правую производную при всех $t > 0$.

Теперь найдём левую производную. Зафикисируем $t > 0$ и выберем $0 < h < t$, тогда

$$\frac{\pi(t)-\pi(t-h)}{h} = \frac{\pi(h)-\pi(0)}{h}\pi(t-h) = \pi(t-h)\frac{\pi(h)-\pi(0)}{h},$$

перейдём к пределу при $h \to +0$, учитывая непрерывность $\pi(t-h) \to \pi(t)$, получим

$$\lim_{h\to+0}\frac{\pi(t)-\pi(t-h)}{h} = \Lambda\pi(t) = \pi(t)\Lambda, \tag{4.13}$$

и эти равенства вместе с (4.12) влекут уравнения (4.10), (4.11).

Непрерывность матричнозначной функции $\pi(t)$, $t > 0$, непосредственно следует из непрерывности матричнозначной функции $\pi(\cdot)$ и любого из уравнений (4.10), (4.11). Теорема доказана.

Замечание 4.8. В случае счетного числа состояний система уравнений Колмогорова также верна, но следует наложить на матрицы $\pi(t)$ некоторые дополнительные условия.

4.2. Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний. Положим $p_i(t) = P(\xi(t) = x_i)$, $i = 1, \ldots, s$, и выведем из уравнения (4.11) систему дифференциальных уравнений для функций $p_i(\cdot)$. По определению переходной вероятности

$$p_j(t) \overset{\text{def}}{=\!=} P(\xi(t) = x_j) = \sum_{i=1}^{s} P(\xi(t) = x_j \,|\, \xi(0) = x_i)P(\xi(0) = x_i) = \sum_{i=1}^{s}\pi_{ij}(t)a_i,$$

где a_i – начальная вероятность. Отсюда в силу уравнения (4.11)

$$\dot p_j(t) = \sum_{i=1}^{s}\dot\pi_{ij}(t)a_i = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{s}\pi_{ik}(t)\Lambda_{kj}\right)a_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \Lambda_{kj} \left(\sum_{i=1}^{s} \pi_{ik}(t) a_i \right) = \sum_{k=1}^{s} \Lambda_{kj} p_k(t),$$

Итак, мы имеем

$$\dot{p}_j(t) = \sum_{k=1}^{s} \Lambda_{kj} p_k(t), \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{4.14}$$

В ряде случаев уравнение (4.14) удобно записать в другом виде. Для этого заметим, что в силу определения (4.5) и равенства $\pi(0) = I$

$$\sum_{k=1}^{s} \Lambda_{kj} = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{s} \bigl(\pi_{kj}(h) - \delta_{kj} \bigr) = 0,$$

поскольку выполнено условие стохастичности $\sum_{k=1}^{s} \pi_{kj}(h) = 1$. Таким образом, справедливо равенство $\Lambda_{jj} = -\sum_{k \neq j} \Lambda_{kj}$ и

$$\dot{p}_j(t) = \sum_{k \neq j}^{s} \Lambda_{kj} p_k(t) - p_j(t) \sum_{k \neq j} \Lambda_{kj}, \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{4.15}$$

Система уравнений (4.14) или (4.15) дополняется начальным условием $p_j(0) = a_j$, $j = 1, \ldots, s$. Имеет место также условие нормировки $\sum_{j=1}^{s} p_j(t) = 1$. При этих условиях система (4.14) (или (4.15)) имеет единственное решение.

Пример 4.11. Показать, что процесс Пуассона является марковским случайным процессом со счётным числом состояний.

Решение. В данном случае множество состояний с.п. есть $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Проверим равенство (4.1). Для любых $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_+$ и для любых $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ положим $\eta_1 = \xi(t_1)$, $\eta_k = \xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, и воспользуемся независимостью приращений. Тогда

$$\begin{aligned} P(\xi(t_1) = m_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = m_{n-1}, \xi(t_n) = m_n) = \\ = P(\eta_1 = m_1, \ldots, \eta_{n-1} = m_{n-1} - m_{n-2}, \eta_n = m_n - m_{n-1}) = \\ = P(\eta_1 = m_1) \cdots P(\eta_{n-1} = m_{n-1} - m_{n-2}) \cdot P(\eta_n = m_n - m_{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P(\xi(t_n) = m_n \,|\, \xi(t_{n-1}) = m_{n-1}, \ldots, \xi(t_1) = m_1) = \\ = \frac{P(\xi(t_n) = m_n, \ldots, \xi(t_1) = m_1)}{P(\xi(t_{n-1}) = m_{n-1}, \ldots, \xi(t_1) = m_1)} = \\ = \frac{P(\eta_1 = m_1, \ldots, \eta_{n-1} = m_{n-1} - m_{n-2}, \eta_n = m_n - m_{n-1})}{P(\eta_1 = m_1, \ldots, \eta_{n-1} = m_{n-1} - m_{n-2})} = \\ = P(\eta_n = m_n - m_{n-1}) = \frac{((t_n - t_{n-1})\lambda)^{m_n - m_{n-1}}}{(m_n - m_{n-1})!} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}. \end{aligned}$$

Уже из этого соотношения видно, что условная вероятность в левой части равенства не зависит от значений t_k и m_k с номерами $k < m_{n-1}$. Однако для строгости доказательства заметим, что, положив $\tilde{\eta}_{n-1} = \xi(t_{n-1}) = \xi(t_{n-1}) - \xi(0)$, мы получим опять же в силу независимости приращений на промежутках $[0, t_{n-1})$ и $[t_{n-1}, t_n)$

$$P(\xi(t_n) = m_n \,|\, \xi(t_{n-1}) = m_{n-1}) = \frac{P(\xi(t_n) = m_n, \xi(t_{n-1}) = m_{n-1})}{P(\xi(t_{n-1}) = m_{n-1})} =$$
$$= \frac{P(\tilde{\eta}_{n-1} = m_{n-1}, \eta_n = m_n - m_{n-1})}{P(\tilde{\eta}_{n-1} = m_{n-1})} = P(\eta_n = m_n - m_{n-1}).$$

Таким образом, условие (4.1) выполнено, и процесс Пуассона есть марковский случайный процесс с такими переходными вероятностями:

$$\pi_{ij}(t) = P(\xi(u+t) - \xi(u) = i - j) = P(\xi(t) = j - i) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \qquad j - i \geqslant 0.$$

Если $j - i < 0$, то $\pi_{ij}(t, t+u) = 0$.

Видно, что однородность марковского случайного процесса (зависимость переходной вероятности только от разности времён $t = (u + t) - u$) есть прямое следствие однородности процесса Пуассона во времени.

Заметим также, что

$$\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & j - i < 0, \\ -\lambda e^{-\lambda t}, & j - i = 0, \\ -\lambda \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} + \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{j-i-1}}{(j-i-1)!} e^{-\lambda t}, & j - i > 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

следовательно,

$$\Lambda \overset{\text{def}}{=\!=} \left.\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \begin{cases} 0, & j - i < 0, \\ -\lambda, & j - i = 0, \\ \lambda, & j - i = 1, \\ 0, & j - i > 1. \end{cases}$$

Записав (4.16) как

$$\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & j < i, \\ -\lambda \pi_{ij}, & j = i, \\ -\lambda \pi_{ij} + \lambda \pi_{i+1,j}, & j > i, \end{cases}$$

видим, что уравнения Колмогорова $\dot{\pi}(t) = \Lambda \pi = \pi \Lambda$ в данном случае выполнены.

5. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ ПО ПРЯМОЙ

Рассмотрим простейшую математическую модель *случайного блуждания*. Пусть точечная частица может совершать только один тип движений: в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ частица перемещается вдоль прямой так, что в момент времени t_{n+1} она оказывается в точке, отстоящей от на единичное расстояние влево или вправо от точки, где она находилась в момент времени t_n. Без ограничения общности можно считать, что координата частицы в любой момент времени есть целое число. Введём на прямой некоторое начало отсчёта и будем писать

$\xi(t_n) = j$, если в момент времени t_n частица находилась в точке j; здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Предположим, что блуждание имеет случайный характер и осуществляется в соответствии со следующим законом: прыжок вправо частица совершает с вероятностью p, а прыжок влево – с вероятностью q. При этом любые другие перемещения невозможны, так что $p + q = 1$, примем также, что вероятности скачков не зависят от положения частицы и предыстории её движения. В силу последнего предположения случайные величины $\xi(t_0), \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ удовлетворяют условию (4.1), другими словами, последовательность $\xi(t_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, является однородной цепью Маркова со счётным множеством состояний $x_j = j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Нетрудно выписать матрицу перехода за один шаг:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} p, & j = i+1, \\ q, & j = i-1, \\ 0, & j \neq i \pm 1, \end{cases} \qquad i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{5.1}$$

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ частица достоверно находилась в точке m, таким образом, начальное распределение есть $P(\xi(0) = m) = \delta_{j,m}$ для $j \in \mathbb{Z}$.

5.1. Вероятность смещения на d единиц вправо или влево. Выведем одномерное распределение такого случайного процесса. Положим $\xi_n = \xi(t_n)$ для $n = 0, 1, \ldots$ и найдем $P(\xi_n = m + d)$ для каждого $d \in \mathbb{Z}$.

Событие $\xi_n = m + d$ имеет место тогда и только тогда, когда частица за n шагов сместилась на d единиц вправо при $d > 0$ или на d единиц влево при $d < 0$. Пусть при этом она сделала ровно k шагов вправо и, следовательно, $n - k$ шагов влево. Тогда смещение частицы равно $d = 1 \cdot k + (-1) \cdot (n - k)$, откуда $k = (n + d)/2$. Число прыжков должно быть целым числом в интервале $[0, n]$, откуда

$$P(\xi_n = m + d) = \begin{cases} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{если } k = (n+d)/2 \in \{0, 1, \ldots, n\}, \\ 0, & \text{если } k = (n+d)/2 \notin \{0, 1, \ldots, n\}, \end{cases} \qquad d \in \mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

При выводе одномерного распределения мы воспользовались независимостью скачков и применили формулу для вероятности в схеме Бернулли, считая успехом прыжок частицы вправо. Заметим, что $P(\xi_n = m + d) = 0$, когда $|d| > n$, в этом случае частица «не успевает» дойти из начальной в конечную точку за n шагов, даже двигаясь строго в одном направлении (налево при $d < 0$ и направо при $d > 0$). Кроме того, число шагов n и смещение d должны иметь как целые числа одну чётность. Понятно, что вероятность (5.2) не зависит от начального положения m и определяется только числом шагов n (в терминах случайных процессов – моментом времени, в терминах последовательности случайных величин – номером члена последовательности) и смещением d.

При анализе случайных блужданий очень удобно пользоваться понятием траектории случайного процесса. В данном случае траектория представляет собой набор пар чисел (n, m_m), $m_n \in \mathbb{Z}$, $n = 0, 1, \ldots$, который соответствует реализации случайной последовательности вида

$$\xi_1 = m_1, \ \ldots, \ \xi_n = m_n, \ldots .$$

Мы рассматриваем событие, когда частица за n шагов пришла из точки m в точку $m+d$, другим словами, её траектория начинается в точке $(0, m)$ и заканчивается в точке $(n, m+d)$. Чтобы пройти по этой траектории, необходимо и достаточно совершить $k=(n+d)/2$ прыжков вправо и $n-k=(n-d)/2$ прыжков влево. Равенство (5.2) при этом можно понимать следующим образом. Вероятность прохода по каждой такой траектории равна $p^k q^{n-k}$. Всего существуют C_n^k таких траекторий.

Для наглядности удобно соединить точки траектории отрезками прямых, получится непрерывная ломаная из n звеньев, начальная точка которой расположена в точке $(0, m)$, конечная – в точке $(n, m+d)$, а наклон каждого звена ломаной есть $\pm 45°$. Такую ломаную мы далее будем обозначать как $\mathcal{L}_n(m, m+d)$ и говорить, что траектория имеет длину n (т. е. под длиной траектории понимать не геометрическую длину ломаной, а количество звеньев).

5.2. Вероятность непопадания в ноль. Найдём вероятность того, что частица, стартовав из точки $m>0$, за n шагов пришла в точку $m+d>0$ и при этом ни разу не попала в точку с координатой ноль:

$$P_n^+(m, m+d)=P(\xi_n=m+d, \xi_{n-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0=m). \tag{5.3}$$

Другими словами, мы ищем вероятность того, что траектория $\mathcal{L}_n(m, m+d)$ целиком лежит выше горизонтальной оси. Как мы уже отмечали, вероятность прохода по любой траектории $\mathcal{L}_n(m, m+d)$ равна $p^k q^{n-k}$, где $k=(n+d)/2$, поэтому вероятность (5.3) равна

$$P_n^+(m, m+d)=N_n(m, m+d) \cdot p^k q^{n-k},$$

где $N_n(m, m+d)$ – число траекторий из m в $m+d$ длины n, не пересекающих горизонтальную ось t и не касающихся этой оси. Очевидно, что

$$N_n(m, m+d)=C_n^k-\overline{N}_n(m, m+d),$$

где C_n^k – полное число траекторий из m в $m+d$ длины n, а $\overline{N}_n(m, m+d)$ – число траекторий из m в $m+d$ длины n, хотя бы один раз пересекающих ось t.

Найдём $\overline{N}_n(m, m+d)$. Каждую траекторию из m в $m+d$ длины n, хотя бы один раз пересекающую ось t, будем как обозначать как $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$. Для любой такой траектории найдется хотя бы один шаг, на котором частица окажется в точке с нулевой координатой. Ответ даёт так называемый *принцип отражения.*

Утверждение 5.1.

$$\overline{N}_n(m, m+d)=C_n^{\bar{k}}, \quad \text{если} \quad \bar{k}=\frac{n+2m+d}{2}=k+m \in\{0,1, \ldots, n\}. \tag{5.4}$$

Если $\bar{k} \notin\{0,1, \ldots, n\}$, то $\overline{N}_n(m, m+d)=0$, другими словами, проход из точки m в точку $m+d$ с заходом в ноль невозможен.

Доказательство. Возьмём любую траекторию $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$, которая имеет длину n, начинается в точке m, заканчивается в точке $m+d$ и хотя бы один раз пересекает ось t или касается ее. Введем j – <u>минимальный</u> номер шага, для которого $\xi_j=0$, т. е. j – момент первого пересечения или касания траекторией $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ оси $x=0$. Сопоставим траектории $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ траекторию $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$, идущую из точки $(0,-m)$ в точку $(n, m+d)$ по следующему правилу. Часть траектории

$\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$, лежащая левее точки $(j, 0)$, получена симметричным отражением такой же части траектории $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ относительно оси t (заметим, что в моменты времени $t < j$ часть траектории $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ лежит строго выше оси, следовательно, часть траектории $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$ лежит строго ниже оси), а в последующих точках обе траектории совпадают.

Любое блуждание, начинающееся в точке $-m < 0$ и заканчивающееся в точке $m + d > 0$, с необходимостью пройдет через точку 0 (начавшись ниже оси и закончившись выше оси, непрерывная траектория обязательно ось пересечёт). Рассмотрим какую-либо траекторию $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$, отвечающую этому блужданию. Как и выше, обозначим через j минимальный номер шага, для которого $\xi_j = 0$ (момент первого пересечения или касания оси), и отразим симметрично относительно оси t часть этой траектории, лежащую левее точки $(j, 0)$, а при $t \geqslant j$ продолжим двигаться по траектории $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$. В результате получим траекторию $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$, которая также проходит через точку $(j, 0)$, т. е. пересекает ось t или касается ее.

Таким образом, блуждание из m в $m + d$, проходящее через ноль, и любое блуждание из точки $-m$ в точку $m + d$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Количество траекторий вида $\widetilde{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$ равно $C_n^{\bar{k}}$, где $\bar{k} = (n+2m+d)/2$ (в данном случае смещение частицы равно $\overline{d} = 2m + d$). В силу взаимно однозначного соответствия количество траекторий вида $\bar{\mathcal{L}}_n(-m, m+d)$ совпадает с количеством траекторий вида $\overline{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$, т. е.

$$\overline{N}_n(m, m+d) = C_n^{\bar{k}}, \qquad N_n(m, m+d) = C_n^k - C_n^{\bar{k}}.$$

Формула (5.4) доказана.

Итак, для $m > 0$ и $m + d > 0$

$$P_n^+(m, m+d) = (C_n^k - C_n^{\bar{k}}) p^k q^{n-k}, \qquad k = \frac{n+d}{2}, \quad \bar{k} = \frac{n+2m+d}{2} = k + m. \quad (5.5)$$

Как и в формуле (5.2), числа $k = (n+d)/2$ и $\bar{k} = (n+2m+d)/2$ должны принадлежать множеству $\{0, 1, \ldots, n\}$, иначе $P_n^+(m, m+d) = 0$.

5.3. Первое возвращение в исходную точку. Будем считать, что частица начинает движение из точки $m = 0$, $P(\xi(0) = 0) = 1$. Обозначим через R_{2r} событие, заключающееся в том, что частица в первый раз вернулась в начальную точку в момент $t = 2r > 0$ (очевидно, что для возврата в исходную точку требуется четное число шагов). Найдем

$$P(R_{2r}) = P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Если $\xi_0 = 0$, $\xi_1 \neq 0$, то либо $\xi_1 = 1$, либо $\xi_1 = -1$. В соответствии с этим представим R_{2r} в виде $R_{2r} = R_{2r}^+ + R_{2r}^-$ (как обычно в теории вероятностей сумма – это объединение несовместных событий), при этом отвечающая событию R_{2r}^+ траектория $\mathcal{L}_{2r}^+(0, 0)$ лежит строго выше оси t всюду, кроме точек $(0, 0)$ и $(2r, 0)$. Поскольку частица совершает только шаги длины единица, это возможно, только если при $t = 2r - 1$ частица находилась в точке $m = 1$, и мы имеем

$$P(R_{2r}^+) = P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Пусть сначала $r = 1$. Событие $R_2^{\pm}$ означает, что частица за два шага вернулась в исходную точку, т. е. совершила два прыжка в разные стороны, поэтому мы имеем $P(R_2^{\pm}) = pq$ и $P(R_{2r}) = 2pq$. При $r > 1$ мы можем записать следующее равенство:

$$\begin{aligned} P(R_{2r}^{+}) &= P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1, \,|\, \xi_0 = 0) = \\ &= P(\xi_{2r} = 0 \,|\, \xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1, \xi_0 = 0) \times \\ &\times P(\xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &P(\xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0) = \\ &\qquad = P(\xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0 \,|\, \xi_1 = 1) P(\xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0). \end{aligned} \tag{5.6}$$

В силу марковского свойства (4.1)

$$P(\xi_{2r} = 0 \,|\, \xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1, \xi_0 = 0) = P(\xi_{2r} = 0 \,|\, \xi_{2r-1} = 1) = q,$$

а правая часть равенства (5.6) записывается как

$$P(\xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0 \,|\, \xi_1 = 1) = P_{2r-2}^{+}(1,1) = (C_{2r-2}^{r-1} - C_{2r-2}^{r}) p^{r-1} q^{r-1},$$

где мы воспользовались формулой (5.5) при $m = m + d = 1$, $n = 2r - 2$ для подсчёта вероятности перейти из точки $(1,1)$ в точку $(2r-1, 1)$, не проходя через ноль.

Сделаем тривиальные преобразования:

$$\begin{aligned} C_{2r-2}^{r-1} - C_{2r-2}^{r} &= \frac{(2r-2)!}{(r-1)!(r-1)!}\left(1 - \frac{r-1}{r}\right) = \frac{(2r-2)!}{(r-1)!(r-1)!r} = \\ &= \frac{(2r-2)!(2r-1)2r}{(r-1)!(r-1)!r(2r-1)2r} = \frac{1}{2}\frac{(2r)!}{r!r!(2r-1)} = \frac{1}{2}\frac{C_{2r}^{r}}{2r-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$P(R_{2r}^{+}) = \frac{1}{2}\frac{C_{2r}^{r}}{2r-1}(pq)^r.$$

Вероятность $P(R_{2r}^{-})$ блуждания из точки $m = 0$ в точку $m_{2r} = 0$ с дополнительным ограничением $m_1 = -1$, $m_2 < 0$, …, $m_{2r-1} < 0$ получается из $P(R_{2r}^{-})$ взаимной заменой p на q, поэтому $P(R_{2r}^{-}) = P(R_{2r}^{+})$, и мы окончательно получаем

$$P(R_{2r}) = P(R_{2r}^{-}) + P(R_{2r}^{+}) = \frac{C_{2r}^{r}}{2r-1}(pq)^r, \qquad r = 1, 2, \ldots . \tag{5.7}$$

События R_{2r} несовместны при разных r, поэтому

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(R_{2r}) = P\left(\sum_{r=1}^{\infty} R_{2r}\right) = P(R),$$

где событие R заключается в том, что частица когда-либо вернется в исходную точку. Для любых $p, q \geqslant 0$ при условии $p + q = 1$ имеем оценку $0 \leqslant pq \leqslant 1/4$. Степенной ряд, составленный из слагаемых вида (5.7), при этом сходится,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_{2r}^{r}}{2r-1}(pq)^r = 1 - \sqrt{1 - 4pq}.$$

В случае $p = q = 1/2$ получаем $P(R) = 1$, и частица всегда (с вероятностью единица) возвращается в исходную точку. Если $p \neq q$, то $P(R) < 1$, в предельном случае $p = 0$ (или $q = 0$) вероятность возврата равна нулю, что, впрочем, является очевидным фактом, поскольку в этом случае частица совершает детерминированное движение в одном направлении.

5.4. Общий случай взвращений в исходную точку. Пусть V_{2n} – событие, заключающееся в том, что частица частица в момент времени $t = 2n$ оказалась в начальной точке, при этом неважно, была ли она в этой точке ранее или нет. При $n = 1, 2, \ldots$ в соответствии с (5.2)

$$P(V_{2n}) = P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_0 = 0) = C_{2n}^{n}(pq)^n, \tag{5.8}$$

поскольку событие V_{2n} происходит тогда и только тогда, когда частица за $2n$ шагов сместилась на расстояние $d = 0$.

Выедем ещё одну полезную формулу. Представим событие V_{2n} в виде разложения в сумму по моментам первого попадания частицы в точку ноль:

$$V_{2n} = \sum_{r=1}^{n-1} \widetilde{R}_{2r,2n} + R_{2n},$$

где $\widetilde{R}_{2r,2n}$ означает, что при $2n$ шагах блуждания первое возвращение в ноль произошло в момент времени $2r < 2n$, далее частица двигалась произвольным образом (возможно, вновь возвращаясь в ноль) и при $t = 2n$ опять же оказалась в нуле. Найдём

$$P(\widetilde{R}_{2r,2n}) = P(\xi_{2n} = 0, \xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0, \,|\, \xi_0 = 0).$$

Заметим, что в силу марковского свойства (4.1)

$$P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0, \xi_0 = 0) = P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_{2r} = 0), \tag{5.9}$$

а $P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_{2r} = 0)$ есть вероятность того, что частица, совершив $2n - 2r$ шагов, окажется в начальной точке, т. е.

$$P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_{2r} = 0) = P(V_{2n-2r}). \tag{5.10}$$

Далее, $P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0)$ есть вероятность того, что траектория частицы пройдет из точки $(0, 0)$ в точку $(2r, 0)$, ни разу после момента времени $t = 0$ не пройдя через ноль, т. е. $t = 2r$ – это момент первого возвращения в ноль, и

$$P(\xi_0 = 0, \xi_1 \neq 0, \ldots, \xi_{2r-1} \neq 0, \xi_{2r} = 0) = P(R_{2r}). \tag{5.11}$$

Используя равенства (5.9)–(5.11), получаем

$$\begin{aligned}
P(\xi_{2n} = 0, \xi_{2r} = m_{2n}, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0, \,|\, \xi_0 = 0) = \\
= P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0, \xi_0 = 0) \times \\
\times P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\
= P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_{2r} = 0) P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0) =
\end{aligned}$$

$$= P(V_{2n-2r})P(R_{2r}).$$

Таким образом,

$$P(V_{2n}) = \sum_{r=1}^{n-1} P(V_{2n-2r})P(R_{2r}) + R_{2n} = \sum_{r=1}^{n} P(V_{2n-2r})P(R_{2r}), \qquad (5.12)$$

где мы учли, что $P(V_0) = P(\xi_0 = 0) = 1$.

5.5. Последние возвращения. Найдем вероятность того, что, стартовав из точки $m = 0$, частица в моменты времени $t = 1, 2, \ldots, 2n$ не вернется в начало координат. Обозначим указанное событие через B_{2n}, $n = 1, 2, \ldots$. Учитывая результат первого шага, запишем

$$P(B_{2n}) = P(\xi_{2n} \neq 0, \ldots, \xi_2 \neq 0, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0) = P(B_{2n}^{+}) + P(B_{2n}^{-}),$$
$$P(B_{2n}^{+}) = P(\xi_{2n} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0),$$
$$P(B_{2n}^{+}) = P(\xi_{2n} < 0, \ldots, \xi_2 < 0, \xi_1 = -1 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Разложим событие B_{2n}^{+} по полной группе событий, отвечающих возможным положениям частицы на $(2n)$-м шаге. Очевидно, что за $2n$ шагов частица смещается на расстояние $1 \cdot k + (-1) \cdot (2n - k) = 2k - 2n$, где $k = 0, \ldots, 2n$ – число шагов вправо, т. е. смещение является чётным числом. Кроме того, с необходимостью $\xi_{2n} \leqslant 2n$ и по условию (в рамках события B_{2n}^{+}) мы имеем $\xi_{2n} > 0$, поэтому $\xi_{2n} = 2s$, $s = 1, \ldots, s$. Получаем

$$P(B_{2n}^{+}) = \sum_{s=1}^{n} P(\xi_{2n} = 2s, \xi_{2n-1} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} P(\xi_{2n} = 2s, \xi_{2n-1} > 0, \ldots, \xi_2 > 0 \,|\, \xi_1 = 1) P(\xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0). \qquad (5.13)$$

При этом, очевидно $P(\xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0) = p$.

Пусть $s < n$. Тогда имеем

$$P(\xi_{2n} = 2s, \xi_{2n-1} > 0, \ldots, \xi_2 > 0 \,|\, \xi_1 = 1) = P_{2n-1}^{+}(1, 2s)$$

поскольку мы имеем траекторию, которая проходит из точки $(1, 1)$ в точку $(2n, 2s)$ без захода в ноль. В данном случае в (5.5) $m = 1$, $m + d = 2s$ и n следует заменить на $2n - 1$. Таким образом,

$$k = \frac{n + d}{2} \mapsto n + s - 1, \quad n - k \mapsto 2n - 1 - (n + s - 1) = n - s, \quad \bar{k} = k + m = n + s.$$

и

$$P_{2n-1}^{+}(1, 2s) = (C_{2n-1}^{n+s-1} - C_{2n-1}^{n+s}) p^{n+s-1} q^{n-s}, \qquad s = 1, \ldots, n - 1.$$

При $s = n$ существует ровно один путь из точки $(1, 1)$ в точку $(2n, 2n)$, и он не проходит через ноль (все прыжки совершаются вправо). Таким образом, в данном случае $P_{2n-1}^{+}(1, 2n) = p^{2n-1}$, и мы можем записать по аналогии с предыдущим равенством

$$P_{2n-1}^{+}(1, 2s)\big|_{s=n} = C_{2n-1}^{n+s-1} p^{n+s-1} q^{n-s}.$$

Подставим полученные выражения в (5.13):

$$
\begin{aligned}
P(B_{2n}^+) &= \sum_{s=1}^{n} C_{2n-1}^{n+s-1} p^{n+s} q^{n-s} - \sum_{s=1}^{n-1} C_{2n-1}^{n+s} p^{n+s} q^{n-s} = \\
&= \sum_{s=1}^{n} C_{2n-1}^{n-s} p^{n+s} q^{n-s} - \sum_{s=1}^{n} C_{2n-1}^{n-s} p^{n+s-1} q^{n-s+1} + C_{2n-1}^{n-1} p^n q^n,
\end{aligned}
$$

где мы произвели во второй сумме сдвиг индекса $s \mapsto s+1$ (при этом суммирование происходит по $s = 2, \ldots, n$), добавили и вычли одно слагаемое с $s = 1$, и использовали равенство $C_{2n-1}^{n+s-1} = C_{2n-1}^{n-s}$.

В результате получаем

$$
P(B_{2n}^+) = \sum_{s=1}^{n} C_{2n-1}^{n-s} p^{n+s} q^{n-s} \left(1 - \frac{q}{p}\right) + C_{2n-1}^{n-1} p^n q^n. \tag{5.14}
$$

Вероятность $P(B_{2n}^-)$ получается из $P(B_{2n}^+)$ взаимной заменой p на q:

$$
P(B_{2n}^-) = \sum_{s=1}^{n} C_{2n-1}^{n-s} p^{n-s} q^{n+s} \left(1 - \frac{p}{q}\right) + C_{2n-1}^{n-1} p^n q^n. \tag{5.15}
$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить для **симметричных блужданий**, т.е. для случая $p = q = 1/2$. Тогда в выражениях (5.14) и (5.15) останется только одно слагаемое (вне суммы), и мы получаем при $p = q = 1/2$

$$
\begin{aligned}
P(B_{2n}) &= P(\xi_{2n} \neq 0, \ldots, \xi_2 \neq 0, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\
&= 2C_{2n-1}^{n-1} p^n q^n = \frac{2n(2n-1)!}{n(n-1)!(n-1)!} (pq)^n = C_{2n}^n (pq)^n = \frac{C_{2n}^n}{4^n}.
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

Введем случайную величину α_{2n}, равную номеру шага, при котором произошло <u>последнее</u> возвращение в начальную точку при $2n$ шагах блуждания. Выпишем распределение случайной величины α_{2n}:

$$
\begin{aligned}
P(\alpha_{2n} = 2s) &= P(\xi_{2n} \neq 0, \ldots, \xi_{2s+1} \neq 0, \xi_{2s} = 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\
&= P(\xi_{2n} \neq 0, \ldots, \xi_{2s+1} \neq 0 \,|\, \xi_{2s} = 0) P(\xi_{2s} = 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\
&= P(B_{2n-2s}) P(V_{2s}), \qquad s = 1, \ldots, n-1,
\end{aligned}
$$

или, в явном виде, с учётом (5.8) и (5.16) при $p = q = 1/2$

$$
P(\alpha_{2n} = 2s) = C_{2n-2s}^{n-s} (pq)^{n-s} \cdot C_{2s}^s (pq)^s = \frac{C_{2s}^s C_{2n-2s}^{n-s}}{4^n}, \qquad s = 1, \ldots, n-1. \tag{5.17}
$$

При $s = 0$ событие $\alpha_{2n} = 0$ равносильно тому, что частица за $2n$ шагов ни разу не вернулась в исходную точку, т. е. событию B_{2n}. Формула (5.17) при этом приобретает вид $P(\alpha_{2n} = 0) = P(B_{2n}) = C_{2n}^n / 4^n$ в соответствии с (5.16). При $s = n$ событие $P(\alpha_{2n} = 2n)$ рассчитывается по формуле

$$
P(\alpha_{2n} = 2n) = P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_0 = 0) = P(V_{2n}) = \frac{C_{2n}^n}{4^n}.
$$

Таким образом, с учётом равенства $C_0^0 = 1$ формулу (5.17) можно распространить на все допустимые значения s:

$$P(\alpha_{2n} = 2s) = C_{2n-2s}^{n-s}(pq)^{n-s} \cdot C_{2s}^{s}(pq)^{s} = \frac{C_{2s}^{s} C_{2n-2s}^{n-s}}{4^n}, \qquad s = 0, \ldots, n. \tag{5.18}$$

Легко видеть, что $P(\alpha_{2n} = 2s) = P(\alpha_{2n} = 2n - 2s)$. Другими словами, для последнего возврата в начало вероятность на раннем шаге с номером $2s$ такая же, как аналогичная вероятность на соответствующем шаге $2n - 2s$, близком к концу. При больших n можно применить формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$ и записать приближённую формулу для (5.18) в случае больших n, s, $n - s$:

$$\begin{aligned} P(\alpha_{2n} = 2s) &\approx \frac{\sqrt{2\pi 2s}(2s)^{2s}e^{-2s}\sqrt{2\pi(2n-2s)}(2n-2s)^{2n-2s}e^{-(2n-2s)}}{\left(\sqrt{2\pi s}(s)^s e^{-s}\right)^2 \left(\sqrt{2\pi(n-s)}(n-s)^{n-s}e^{-(n-s)}\right)^2 4^s} = \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{s(n-s)}} = \frac{1}{\pi n}\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}, \qquad z = \frac{s}{n}, \quad 0 < z < 1. \end{aligned}$$

В последнем выражении симметрия $s \leftrightarrow n - s$, которой соответствует $z \leftrightarrow 1 - z$, становится ещё более явной. При $z \gtrsim 0$ или $z \lesssim 1$ мала величина s или $n - s$ соответственно, поэтому асимптотика работает плохо. Тем не менее из последней формулы можно увидеть, что момент последнего возвращения частицы в ноль будет с большей вероятностью принимать малые или большие, чем средние значения (минимум вероятности находится в точке $z = 1/2$, что отвечает $s = n/2$). Удивительно, что малые и большие значения времени последнего возвращения равновероятны.

Сравнивая (5.18) с формулой (5.8) при $p = q = 1/2$, видим, что

$$P(\alpha_{2n} = 2s) = P(V_{2s})P(V_{2n-2s}), \qquad s = 0, \ldots, n. \tag{5.19}$$

5.6. Распределение времени пребывания на одной стороне. Для симметричных блужданий введем случайную величину β_{2n}, которая равна $2k$, если из $2n$ звеньев ломаной $\mathcal{L}_{2n}(0, m_{2n})$ ровно $2k$ звеньев лежат не ниже оси t и, соответственно, ровно $2n - 2k$ звеньев лежат не выше оси t. Найдем распределение случайной величины β_{2n}.

Прежде всего рассмотрим случай $\beta_{2n} = 2n$, когда вся траектория находится в верхней полуплоскости и найдем

$$P(\beta_{2n} = 2n) = P(\xi_{2n} \geqslant 0, \ldots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Как и выше, разложим эту вероятность по возможным положениям частицы на $(2n)$-м шаге (мы уже отмечали, что если число шагов чётно, то и смещение – чётное число, при условии неотрицательности реализаций лежащее в пределах от 0 до $2n$):

$$P(\beta_{2n} = 2n) = \sum_{r=0}^{n} P(\xi_{2n} = 2r, \xi_{2n-1} \geqslant 0, \ldots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Очевидно, что при $r < n$

$$P(\xi_{2n} = 2r, \xi_{2n-1} \geqslant 0, \ldots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0) =$$

$$= P(\xi_{2n} + 1 = 2r + 1, \xi_{2n-1} + 1 \geqslant 1, \ldots, \xi_1 + 1 \geqslant 1 \,|\, \xi_0 + 1 = 1) =$$
$$= P(\tilde{\xi}_{2n} = 2r + 1, \tilde{\xi}_{2n-1} > 0, \ldots, \tilde{\xi}_1 > 0 \,|\, \tilde{\xi}_0 = 1)). \qquad (5.20)$$

Здесь мы ввели последовательность случайных величин $\tilde{\xi}_j = \xi_j + 1$, $j = 1, 2 \ldots$. Она образует цепь Маркова с тем же множеством состояний $\mathbb{Z}$, теми же переходными вероятностями (5.1), что и у последовательности ξ_j, $j = 1, 2 \ldots$. Начальное распределение даётся формулой $P(\tilde{\xi}_0 = 1) = 1$. Вероятность в правой части равенства (5.20) есть вероятность прохода по любой траектории, начинающейся в точке $(0, 1)$, заканчивающейся в точке $(2n, 2r + 1)$ и целиком лежащей выше оси t. Таким образом,

$$P(\xi_{2n} = 2r, \xi_{2n-1} \geqslant 0, \ldots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0) =$$
$$= P^{+}_{2n}(1, 2r + 1) = (C^{n+r}_{2n} - C^{n+r+1}_{2n})p^{n+r}q^{n+r}. \qquad (5.21)$$

При $r = n$ мы имеем $P(\xi_0 = 0, \xi_1 \geqslant 0, \ldots, \xi_{2n} = 2r) = p^{2n}$, потому что достичь точки $m = 2n$ за $2n$ шагов можно, только когда все скачки совершаются вправо. Мы можем считать, что в случае $r = n$ в правой части равенства (5.21) от выражения в скобках остаётся только первое слагаемое.

Подставим эти выражения в сумму и учтем, что $p = q = 1/2$, получим

$$4^n \cdot P(\beta_{2n} = 2n) = \sum_{r=0}^{n} C^{n+r}_{2n} - \sum_{r=0}^{n-1} C^{n+r+1}_{2n} = \sum_{r=0}^{n} C^{n+r}_{2n} - \sum_{r=1}^{n} C^{n+r}_{2n} = C^{n}_{2n}$$

или, сравнивая с (5.17),

$$P(\beta_{2n} = 2n) = P(\alpha_{2n} = 2n) = \frac{C^n_{2n}}{4^n}.$$

Легко показать, что аналогичное утверждение имеет место и при $s = 0$:

$$P(\beta_{2n} = 0) = P(\alpha_{2n} = 0) = \frac{C^n_{2n}}{4^n}. \qquad (5.22)$$

Покажем, что распределения случайных величин α_{2n}, β_{2n} полностью совпадают:

$$P(\beta_{2n} = 2s) = P(\alpha_{2n} = 2s), \qquad s = 0, 1, \ldots, n. \qquad (5.23)$$

Найдем вероятность того, что $\beta_{2n} = 2s$ при $0 < s < n$. В этом случае в траектории блуждания присутствуют звенья, лежащие как снизу, так и сверху от оси t. Следовательно, хотя бы один раз частица вернулась в точку ноль. Пусть $2r$ – номер первого возвращения, т. е. произошло событие R_{2r}. Напишем формальное разложение по полной группе событий $\{R_{2r}\}_{r=\overline{1,n}}$:

$$P(\beta_{2n} = 2s) = \sum_{r=1}^{n} P\big(\{\beta_{2n} = 2s\} \cap R_{2r}\big) = \sum_{r=1}^{n} P\big(\{\beta_{2n} = 2s)\} \cap (R^{+}_{2r} + R^{-}_{2r})\big) =$$
$$= \sum_{r=1}^{n} P\big(\{\beta_{2n} = 2s)\} \cap (R^{+}_{2r}\big) + \sum_{r=1}^{n} P\big(\{\beta_{2n} = 2s)\} \cap R^{-}_{2r})\big)$$

(в последнем выражении мы использовали формулу (5.7)). Если произошли оба события $\beta_{2n} = 2s$ и R^+_{2r}, то, с одной стороны, ровно $2s$ звеньев лежат не ниже оси t; с другой стороны, $2r$ первых звеньев заведомо лежат в верхней полуплоскости. Поэтому, если $r > s$, события $\beta_{2n} = 2s$ и R^+_{2r} несовместны. Аналогично, если произошли события $\beta_{2n} = 2s$ и R^-_{2r}, то в траектории имеются ровно $2n-2s$ звеньев в нижней полуплоскости и в то же время заведомо присутствуют $2r$ таких звеньев. Отсюда, если $r > n-s$, события $\beta_{2n} = 2s$ и R^-_{2r} несовместны. Итак,

$$P(\beta_{2n} = 2s) = \sum_{r=1}^{s} P\big(\{\beta_{2n} = 2s\} \cap R^+_{2r}\big) + \sum_{r=1}^{n-s} P\big(\{\beta_{2n} = 2s\} \cap R^-_{2r}\big).$$

Рассмотрим каждое слагаемое в суммах по отдельности. Если первое возвращение произошло в момент времени $t = 2r$, т. е. произошло событие R^+_{2r}, то первые $2r$ звеньев траектории лежат в верхней полуплоскости. Если при этом $\beta_{2n} = 2s$, то во всей ломаной в верхней полуплоскости лежат $2s$ звеньев. Таким образом для $t = 2r+1, \ldots, 2n$ в траектории $\mathcal{L}_{2n-2r}(0, m_{2n})$, отвечающей движению частицы после первого возвращения в ноль, ровно $2s-2r$ звеньев лежат в верхней полуплоскости. Учитывая марковский характер случайных блужданий, получаем

$$\begin{aligned}
&P\big(\{\beta_{2n} = 2s)\} \cap R^+_{2r}\big) = \\
&= \sum_{\{m_j\}} P(\xi_{2n} = m_{2n}, \ldots, \xi_{2r+1} = m_{2r+1}, \xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} > 0, \ldots, \xi_1 > 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\
&= \sum_{\{m_j\}} P(\xi_{2n} = m_{2n}, \ldots, \xi_{2r+1} = m_{2r+1} \,|\, \xi_{2r} = 0) \times \\
&\qquad\qquad \times P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} > 0, \ldots, \xi_1 > 0 \,|\, \xi_0 = 0),
\end{aligned}$$

где суммирование ведётся по всем наборам положений $m_{2n}, \ldots, m_{2r+1}$ частицы в моменты времени $t = 2r+1, \ldots, 2n$, удовлетворяющим условию, что частица начала движение из точки ноль, а далее ровно $2s-2r$ звеньев её траектории $\mathcal{L}_{2n-2r}(0, m_{2n})$ лежат в верхней полуплоскости. Процесс блужданий однороден во времени, поэтому первый множитель в правой части даёт в точности $P(\beta_{2n-2r} = 2s-2r)$. Второй множитель равен $P(R^+_{2r}) = P(R_{2r})/2$, поскольку мы рассматриваем симметричные блуждания.

Аналогично

$$P\big(\{\beta_{2n} = 2s)\} \cap R^-_{2r}\big) = P(R^-_{2r}) P(\beta_{2n-2r} = 2s) = \frac{P(R_{2r})}{2} P(\beta_{2n-2r} = 2s).$$

Объединяя полученные формулы, имеем при $0 < s < n$

$$P(\beta_{2n} = 2s) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{s} P(R_{2r}) P(\beta_{2n-2r} = 2s-2r) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-s} P(R_{2r}) P(\beta_{2n-2r} = 2s). \quad (5.24)$$

Заметим, что (5.24) – рекуррентное соотношение для распределения β_{2n}. Поэтому для доказательства равенства (5.23) воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ с помощью непосредственного анализа блужданий из нуля при условии, что ровно $2s = 0, 2$ звеньев в траектории из двух звеньев лежат выше оси t, получаем

$$P(\beta_2 = 0) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = -2) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = 0) = q^2 + qp = \frac{1}{2},$$

$$P(\beta_2 = 2) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 2) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = p^2 + qp = \frac{1}{2},$$

С другой стороны, α_2 – момент времени последнего возвращения в ноль при двух шагах блужданий, и

$$P(\alpha_2 = 0) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = -2) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = q^2 + p^2 = \frac{1}{2},$$

$$P(\alpha_2 = 2) P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = 0) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = 2pq = \frac{1}{2},$$

и равенство (5.23) верно.

Сделаем индукционное предположение с учётом формулы (5.18). Пусть для всех $n' \leqslant n - 1$ имеет место совпадение распределений:

$$P(\beta_{2n'} = 2s) = P(\alpha_{2n'} = 2s) = P(V_{2s}) P(V_{2n'-2s}), \quad s = 0, 1, \ldots, n'.$$

Напомним формулу (5.19), а именно $P(\alpha_{2n} = 2s) = P(V_{2s}) P(V_{2n-2s})$. Тогда, переходя от $n - 1$ к n, для $1 \leqslant s \leqslant n - 1$, подставив в (5.24) индукционное предположение, получаем

$$\begin{aligned}
2P(\beta_{2n} = 2s) &= \sum_{r=1}^{s} P(R_{2r}) P(\beta_{2n-2r} = 2s - 2r) + \sum_{r=1}^{n-s} P(R_{2r}) P(\beta_{2n-2r} = 2s) = \\
&= \sum_{r=1}^{s} P(R_{2r}) P(\alpha_{2n-2r} = 2s - 2r) + \sum_{r=1}^{n-s} P(R_{2r}) P(\alpha_{2n-2r} = 2s) = \\
&= \sum_{r=1}^{s} P(R_{2r}) P(V_{2s-2r}) P(V_{2n-2r-(2s-2r)}) + \sum_{r=1}^{n-s} P(R_{2r}) P(V_{2s}) P(V_{2n-2r-2s}).
\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}
2P(\beta_{2n} = 2s) &= P(V_{2n-2s}) \sum_{r=1}^{s} P(R_{2r}) P(V_{2s-2r}) + P(V_{2s}) \sum_{r=1}^{n-s} P(R_{2r}) P(V_{2(n-s)-2r}) = \\
&= P(V_{2n-2s}) P(V_{2s}) + P(V_{2s}) P(V_{2n-2s}),
\end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы учли (5.12). Вновь используя (5.19), получаем

$$2P(\beta_{2n} = 2s) = 2P(\alpha_{2n} = 2s), \qquad s = 1, \ldots, n - 1.$$

Для $s = 0, n$ равенство вероятностей было показано выше. Формула (5.23) доказана.

6. ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Определение 6.1. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, называется *винеровским*, если:

1) его приращения независимы, т. е. для любых $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ случайные величины $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, независимы в совокупности;

2) это процесс однороден во времени, т. е. распределение приращения $\xi(s+t) - \xi(s)$ зависит только от $t > 0$ и не зависит от $s \geqslant 0$;

3) распределение приращения $\xi(s+t)-\xi(s)$ является нормальным с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 t$ (здесь σ^2 – положительная постоянная), т. е. плотность распределения случайной величины $\xi(s+t)-\xi(s)$ имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < x < \infty;$$

4) процесс начинается в нуле: $P(\xi(0)=0)=1$.

Непосредственно из определения вытекает, что сечение $\xi(t)=\xi(t)-\xi(0)$ винеровского процесса распределено нормально, одномерная плотность распределения есть

$$p(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Математическое ожидание $M\xi(t)=0$, дисперсия $D\xi(t)=\sigma^2 t$, а ковариационная функция $R_\xi(t,s)=\sigma^2\min(t,s)$, как это следует из общей формулы для однородных процессов с независимыми приращениями.

Найдём n-мерную плотность распределения. Пусть $0=t_0<t_1<\dots<t_n$. Выразим сечения $\xi(t_k)$ через приращения $\eta_k=\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})$, $k=1,\dots,n$:

$$\begin{aligned}
&\xi(t_1)=\xi(t_1)-\xi(0)=\xi(t_1)-\xi(t_0)=\eta_1,\\
&\xi(t_2)=\xi(t_2)-\xi(t_1)+\xi(t_1)-\xi(t_0)=\eta_1+\eta_2,\\
&\qquad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\xi(t_n)=\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})+\dots+\xi(t_1)-\xi(0)=\eta_1+\dots+\eta_n.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Тогда n-мерную функцию распределения можно найти по следующим формулам:

$$F(x_1,t_1;x_2,t_2\dots,x_n,t_n)\stackrel{\text{def}}{=\!=}P(\xi(t_1)<x_1,\dots,\xi(t_n)<x_n)=$$
$$=P(\eta_1<x_1,\dots,\eta_1+\dots+\eta_n<x_n)=\underset{\substack{z_1<x_1,\\ \dots\dots\dots,\\ z_1+\dots+z_n<x_n}}{\int\dots\int} p_1(z_1)\dots p_n(z_n)\,dx_1\dots dx_n,$$

где мы учли, что случайные величины $\eta_1,\dots,\eta_n$ независимы, и ввели для краткости обозначение $p_k(\,\cdot\,)$ для плотности распределения приращения η_k,

$$p_k(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_k-t_{k-1})}}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2(t_k-t_{k-1})}}, \qquad -\infty<z<\infty.$$

Совершим в n-кратном интеграле линейную замену переменных, которая упрощает вид области интегрирования:

$$\begin{aligned}
&y_1=z_1, \quad y_2=z_1+z_2, \quad \dots, \quad y_n=z_1+\dots+z_1,\\
&z_1=y_1, \quad z_2=y_2-y_1, \quad \dots, \quad z_n=y_n-y_{n-1}
\end{aligned}$$

(эта замена в точности повторяет переход от приращений к сечениям, заданный в (6.1)). Якобиан перехода при такой замене равен единице, поэтому

$$\underset{\substack{z_1<x_1,\\ \dots\dots\dots,\\ z_1+\dots+z_n<x_n}}{\int\dots\int} p_1(z_1)\dots p_n(z_n)\,dx_1\dots dx_n=\underset{y_1<x_1,\dots,y_n<x_n}{\int\dots\int} p_1(y_1)\dots p_n(y_n-y_{n-1})\,dy_1\dots dy_n.$$

Итак,

$$F(x_1,t_1;x_2,t_2\dots,x_n,t_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n}p_1(y_1)\dots p_n(y_n-y_{n-1})\,dy_1\dots dy_n,$$

отсюда получаем, что n-мерная плотность записывается как

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2\ \dots;\,x_n,t_n)=p_1(x_1)\dots p_n(x_n-x_{n-1}) \tag{6.2}$$

или, в явном виде,

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2\dots,x_n,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_k-t_{k-1})}}\,e^{-\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2\sigma^2(t_k-t_{k-1})}} \tag{6.3}$$

для любых $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ и $0=t_0<t_1<\dots<t_n$ (а $t_0=0$ и $x_0=0$ по определению).

Марковское свойство винеровского процесса. Напомним понятие условной плотности распределения. Если случайные величины имеют совместную плотность $p_{\xi_1,\dots,\xi_n}(\,\cdot\,)$, то условная плотность случайной величины ξ_n определяется как функция

$$p_{\xi_n|\xi_{n-1},\dots,\xi_1}(x_n|x_{n-1},\dots,x_1)=\frac{p_{\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\xi_n}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)}{p_{\xi_1,\dots,\xi_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1})},\qquad x_n\in\mathbb{R}.$$

В этой формуле переменная x_n выступает как аргумент функции, а переменные $x_1,\dots,x_{n-1}$ играют роль параметров этой функции. Условная плотность определена при всех $\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$, при которых знаменатель отличен от нуля. Легко заметить полную аналогию определения условной плотности с определением условной вероятности

$$P(A_n\mid A_{n-1}\cap\dots\cap A_1)=\frac{P(A_1\cap\dots\cap A_{n-1}\cap A_n)}{P(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})}.$$

Так же, как и для условной вероятности, для условной плотности имеет место формула полной вероятности (запишем её для $n=2$)

$$p_{\xi_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)p_{\xi_1}(x_1)\,dx_1.$$

Здесь мы считаем, что $x_1\in\mathbb{R}$, а те x_1, для которых $p_{\xi_1}(x_1)=0$ и значение условной плотности не определено, в произведении дают[3] $p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)p_{\xi_1}=p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=0$ и не вносят вклада в интеграл. Также справедлива формула Байеса

$$p_{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2)=\frac{p_{\xi_2|\xi_2}(x_2|x_2)p_{\xi_1}(x_1)}{p_{\xi_2}(x_2)}=\frac{p_{\xi_2|\xi_2}(x_2|x_2)p_{\xi_1}(x_1)}{\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|z_1)p_{\xi_1}(z_1)\,dz_1}.$$

Теперь применим аппарат условных плотностей к винеровскому процессу, имеем в силу (6.2), (6.3)

$$\pi(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\,\dots\,;x_1,t_1)\stackrel{\text{def}}{=\!=}p_{\xi_n(t_n)|\xi_{n-1}(t_{n-1}),\dots,\xi_1(t_1)}(x_n|x_{n-1},\dots,x_1)=$$

[3] По аналогии с условной вероятностью: если $P(A_1)=0$, то формально $P(A_2\mid A_1)P(A_1)=0$, потому что $P(A_2\mid A_1)P(A_1)=P(A_1\cap A_2)=0$.

$$= \frac{p(x_1,t_1;\ \dots;x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)}{p(x_1,t_1;\ \dots;x_{n-1},t_{n-1})} =$$
$$= \frac{p_1(x_1)\dots p_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})p_n(x_n-x_{n-1})}{p_1(x_1)\dots p_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2}))} = p_n(x_n-x_{n-1})$$

или, в явном виде,

$$\pi(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\ \dots;x_1,t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_n-t_{n-1})}}\, e^{-\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2\sigma^2(t_n-t_{n-1})}}.$$

Видно, что правая часть этого равенства зависит только от x_{n-1},t_{n-1} и не зависит от переменных x_k,t_k с более ранними номерами. Мы имеем полную аналогию с марковским свойством для процесса с дискретным множеством состояний. Последнее равенство перепишем как

$$\pi(x,t|z,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2(t-s)}}. \tag{6.4}$$

Справедливо уравнение Чепмена–Колмогорова: если $t_1 < t_2 < t_3$, то для любого времени t_2, удовлетворяющего этому условию,

$$\pi(x_3,t_3|x_1,t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x_3,t_3|x_2,t_2)\,\pi(x_2,t_2|x_1,t_1)\,dx_2. \tag{6.5}$$

В самом деле, если мы для краткости положим $p_{123}(x_1,x_2,x_3) = p(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3)$ для трёхмерной плотности и аналогично $p_{kj}(x_k) = p(x_k,t_k;x_j,t_j)$ и $p_k(x_k) = p(x_k,t_k)$ для двумерной и одномерной плотностей, а также введём обозначения типа $p_{k|j}(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ для условных плотностей, то мы имеем равенства

$$\pi(x_3,t_3|x_1,t_1) = \frac{p_{1,3}(x_1,x_3)}{p_1(x_1)}, \qquad p_{1,3}(x_1,x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{123}(x_1,x_2,x_3)\,dx_2,$$
$$p_{123}(x_1,x_2,x_3) = p_{3|21}(x_3|x_2,x_1)p_{1,2}(x_1,x_2) =$$
$$= p_{3|21}(x_3|x_2,x_1)p_{2|1}(x_2|x_1)p_1(x_1) = p_{3|2}(x_3|x_2)p_{2|1}(x_2|x_1)p_1(x_1),$$

где самое последнее равенство верно в силу марковского свойства. Подставляя одну формулу в другую и совершая тривиальные преобразования, получаем (6.5).

Винеровский процесс как математическая модель случайного блуждания. Пусть частица в дискретные моменты времени $t_k = k\Delta t$, $k = 1,2,\dots$, совершает прыжки длины Δx влево и вправо, выбирая каждое из двух возможных направлений случайным образом с вероятностью $1/2$. Пусть $\xi(t_n)$ – положение частицы в момент времени t_n. Представим случайную величину $\xi(t_n)$ в виде

$$\xi(t_n) = \eta_1 + \dots + \eta_n, \qquad P(\eta_k = \Delta x) = P(\eta_k = -\Delta x) = \frac{1}{2}, \quad k = 1,\dots,n.$$

Очевидно, что $M\eta_k = 0$, $M\eta_k = (\Delta x)^2/2$. Если мы считаем случайные величины $\eta_1,\eta_2,\dots$ независимыми, то к их сумме применима центральная предельная теорема:

$$\frac{1}{\sqrt{n(\Delta x)^2}} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \to \xi^*, \qquad n\to\infty,$$

сходимость понимается как сходимость по распределению, величина ξ^* имеет стандартное нормальное распределение (с нулевым средним и единичной дисперсией).

Теперь рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, с непрерывным временем как следующий непрерывный предел описанных выше случайных блужданий: пусть время t фиксировано, положим $t = n\Delta t$ и $n \to \infty$, причём вместе с $\Delta t \to 0$ потребуем стремления к нулю и Δx так, что

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2 = \text{const}. \tag{6.6}$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}}\,\xi(t) = \sqrt{\frac{\Delta t}{\sigma^2 t}}\sum_{k=1}^{n}\eta_k = \frac{1}{\sqrt{n(\Delta x)^2}}\sum_{k=1}^{n}\eta_k \to \xi^*,$$

другими словами, в непрерывном пределе случайная величина $\xi(t)/\sqrt{\sigma^2 t}$ имеет стандартное нормальное распределение, и это эквивалентно тому, что $\xi(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 t$. Независимость приращений и однородность процесса вытекают из соответствующих свойств случайных блужданий. Таким образом, винеровский процесс можно рассматривать как предельный вариант дискретных случайных блужданий вдоль действительной прямой, когда промежутки времени между скачками и длина скачка согласованно (см. (6.6)) стремятся к нулю. Принято называть такую модель одномерным броуновским движением.

Аналитические свойства траекторий винеровского процесса. Распределение приращения $\xi(t+h) - \xi(t)$ имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma^2 h$, поэтому вследствие неравенства Чебышёва

$$P(|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2 h}{\varepsilon^2} \to 0, \qquad h \to +0,$$

а это означает, что $\xi(t+h) - \xi(t) \to 0$ по вероятности, если $h \to +0$. Ещё более очевидно, что $M\big(\xi(t+h) - \xi(t)\big)^2 = \sigma^2 h \to 0$, т. е. $\xi(t+h) - \xi(t) \to 0$ в среднем квадратичном смысле. Значительно сложнее показать сходимость с вероятностью единица, а именно для любого $t \geqslant 0$

$$P\big\{\omega \in \Omega\colon\ \xi(t+h,\omega) - \xi(t,\omega) \to 0 \ \text{для всех}\ t \geqslant 0\big\} = 1, \qquad h \to +0, \tag{6.7}$$

но и это утверждение верно. Данное свойство естественно назвать *непрерывностью* винеровского процесса. С точки зрения траекторий винеровского процесса свойство (6.7) означает, что почти все траектории – непрерывные функции от $t \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь случайную величину $\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}$, она распределена нормально с нулевым средним, но её дисперсия $\sigma^2 h/h^2 = \sigma^2/h \to \infty$ при $h \to +0$. Это означает, что данная случайная величина едва ли может иметь предел при $h \to +0$ в каком-либо смысле. Оказывается, справедливо следующее утверждение:

$$P\left\{\omega \in \Omega\colon\ \text{существует}\ \lim_{h\to+0}\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\ \text{хотя бы для одного}\ t \geqslant 0\right\} = 0, \tag{6.8}$$

то есть почти все траектории винеровского процесса являются *нигде не дифференцируемыми* функциями.

Распределение времени первого достижения заданного уровня. Пусть винеровский случайный процесс стартует из нуля. Зафиксируем некоторое значение $x > 0$ и определим случайную величину τ_x, равную моменту первого достижения траекторией винеровского процесса точки x. А именно, $\tau_x = t$, если $\xi(s) < x$ для всех $0 \leqslant s < t$ и $\xi(t) = x$.

Найдём распределение случайной величины τ_x. Для решения этой задачи мы примем без доказательства одно равенство:

$$P(\xi(t) < x \,|\, \tau_x < t) = P(\xi(t) > x \,|\, \tau_x < t) = \frac{1}{2}, \qquad t > 0. \tag{6.9}$$

Смысл этого равенства в том, что если в какой-то момент времени $\tau_x = s$ частица достигла точки x, то последующие (при $t > s$) блуждания симметричны относительно точки x. Это условие представляется довольно естественным, его можно понимать как «сдвиг» очевидного равенства $P(\xi(t) < 0) = P(\xi(t) > 0) = 1/2$, получающийся в результате сдвига начала координат на плоскости переменных $\bigl(t, \xi(t)\bigr)$, $t \geqslant 0$, из точки $(0, 0)$ в точку (s, x).

На основании сделанного допущения найдём $F_{\tau_x}(t) = P(\tau_x < t)$. Введём обозначения для двух событий

$$A = \{\xi(t) \leqslant x\}, \qquad B = \{\tau_x \geqslant t\}.$$

Очевидно, что если $\tau_x \geqslant t$, т. е. первое достижение точки с координатой x случилось не ранее, чем в момент времени t, то вплоть до этого момента времени траектория процесса не поднималась выше уровня x, т. е. $\xi(t) \leqslant x$. В терминах введённых выше событий это означает, что B влечёт A или, с точки зрения множеств элементарных исходов, $B \subset A$. Следовательно для дополнений $\bar{A}$ и $\bar{B}$ этих событий имеем

$$\{\xi(t) > x\} = \bar{A} \subset \bar{B} = \{\tau_x < t\}.$$

Учтём это, переписав одно из равенств в (6.9) как

$$\frac{1}{2} = P(\xi(t) > x \,|\, \tau_x < t) = P(\xi(t) > x \,|\, \tau_x < t) = P(\bar{A} \,|\, \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{B})}.$$

Вернёмся к исходным обозначениям и запишем

$$\frac{1}{2} = \frac{P(\xi(t) > x)}{P(\tau_x < t)},$$

откуда

$$\begin{aligned} F_{\tau_x}(t) = P(\tau_x < t) = 2P(\xi(t) > x) = 2\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 t}}\, dz = \\ = 2\int_{x/\sqrt{\sigma^2 t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right)\right), \end{aligned} \tag{6.10}$$

где $\Phi(\,\cdot\,)$ – так называемый интеграл вероятности (функция стандартного нормального распределения),

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz, \qquad \Phi'(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Найдём производную $F'_{\tau_x}(t) = p_{\tau_x}(t)$:

$$p_{\tau_x}(t) = -2\Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) \cdot \frac{d}{dt}\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{x}{t^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad t > 0. \tag{6.11}$$

Здесь $x > 0$ есть параметр плотности распределения $p_{\tau_x}(\,\cdot\,)$.

Из формулы (6.11) нетрудно получить распределение случайной величины (далее $t > 0$ есть фиксированный параметр)

$$\xi^*(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s),$$

равной максимальному значению винеровского процесса на промежутке $[0, t]$. Отметим, что в силу непрерывности траектории максимум достигается с вероятностью единица. Мы будем искать $F_t^*(x) = P(\xi^*(t) < x)$ для $x > 0$; при $x < 0$ следует заменить максимум на минимум и воспользоваться симметричностью винеровского процесса, т. е. тем, что $P(\xi(t) > 0 = P(\xi(t) < 0)$.

Нетрудно заметить, что если $\xi^*(t) < x$, то $\xi(s) < x$ для всех $s \in [0, t]$, и первое достижение траекторией уровня x с необходимостью наступает позже времени t, другими словами, $\tau_x > t$. Верно и обратное: если $\tau_x > t$, то при любом $s \leqslant t$ траектория процесса ещё не достигла уровня x, т. е. $\xi(s) < x$ для всех $s \in [0, t]$, а это влечёт $\xi^*(s) < x$. Таким образом, события $\xi^*(t) < x$ и $\tau_x > t$ равносильны, поэтому

$$F_t^*(x) = P(\xi^*(t) < x) = P(\tau_x > t) = 1 - P(\tau_x \leqslant t) = 1 - P(\tau_x < t) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) - 1.$$

Мы воспользовались тем, что распределение случайной величины τ_x абсолютно непрерывно ($P(\tau_x = t) = 0$), и формулой (6.10). Дифференцируя функцию распределения, получаем

$$p_t^*(x) = \frac{dF_t^*(x)}{dx} = 2\Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}} = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad x > 0.$$

Здесь $t > 0$ есть параметр плотности распределения $p_t^*(\,\cdot\,)$.

Закон арксинуса. Пусть, как и выше $\xi^*(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s)$, где $t > 0$ есть фиксированный параметр. Введём ещё одну случайную величину $\tau^*(t)$, равную первому моменту времени на промежутке $[0, t]$, когда траектория достигла своего максимального значения $\xi^*(t)$. Как уже отмечалось, вследствие непрерывности траектории такой момент времени с вероятностью единица существует. Вычислим плотность распределения этой случайной величины.

Дополнительно к $t > 0$ зафиксируем некоторое положительное $x \leqslant y$ и найдём условную плотность $p_{\xi^*(t)|\tau_x}(y|u)$ при $u < t$. По определению

$$p_{\xi^*(t)|\tau_x}(y|u)\, dy = P(y \leqslant \xi^*(t) < y + dy \,|\, u < \tau_x < u + du).$$

Дальнейшие рассуждения мы будем проводить не совсем строго, заменяя события $y \leqslant \xi^*(t) < y + dy$ и $u < \tau_x < u + du$ равенствами $\xi^*(t) = y$ и $\tau_x = u$, хотя, конечно же, $P(\xi^*(t) = y) = 0$ и $P(\tau_x = u) = 0$.

Если $\tau_x = u < t$ и $x \leqslant y$, то до момента времени u траектория процесса ещё не достигла уровня $x \leqslant y$, следовательно, $\xi(s) < y$ для любого $s \in [0, u)$. Таким образом, максимальное значение y заведомо достигается после времени u,

$$y = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s) = \max_{u \leqslant s \leqslant t} \xi(s).$$

При этом в силу $\tau_x = u$ мы имеем $\xi(u) = x$, таким образом, при условии $\tau_x = u$ процесс $\xi(t)$, $t \geqslant u$, есть винеровский процесс, стартовавший из точки $\xi(t) = x$. Сдвинем начало координат (t, x) в фазовом пространстве в точку $(0, 0)$, т. е. совершим замену $\hat{\xi}(t) = \xi(t-u) - x$, где x и u – фиксированные неслучайные параметры. Стохастические свойства процесса $\hat{\xi}(t)$, $t \geqslant 0$, полностью эквивалентны свойствам процесса $\xi(t)$, $t \geqslant 0$. Таким образом, при условии $\tau_x = u$ случайная величина

$$\xi^*(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s) = \max_{u \leqslant s \leqslant t} \xi(s)$$

имеет то же распределение, что и случайная величина

$$x + \max_{u \leqslant s \leqslant t} \big(\xi(s) - x\big) = x + \max_{0 \leqslant s \leqslant t-u} \hat{\xi}(s) = x + \xi^*(t-u).$$

Нетрудно найти плотность распределения такой сдвинутой на x случайной величины: мы имеем $p_{x+\xi^*(t-u)}(y) = p_{\xi^*(t-u)}(y-x)$ или, в явном виде,

$$p_{\xi^*(t)|\tau_x}(y|u) = p^*_{t-u}(y-x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{t-u}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad 0 < u < t, \quad 0 < x \leqslant y.$$

Далее запишем совместную плотность, используя формулу (6.11):

$$\begin{aligned} p_{\xi^*(t),\tau_x}(y, u) &= p_{\xi^*(t)|\tau_x}(y|u)\, p_{\tau_x}(u) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{t-u}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{x}{u^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 u}} = \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \cdot \frac{x}{u} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 u}}, \qquad 0 < u < t, \quad 0 < x \leqslant y. \end{aligned}$$

В частности, при $x = y$

$$p_{\xi^*(t),\tau_y}(y, u) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \cdot \frac{y}{u} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}}, \qquad 0 < u < t. \tag{6.12}$$

Вспомним, что τ_x – момент, когда траектория винеровского процесса в первый раз достигает уровня x. Если нас интересует достижение уровня $x = y = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(t)$, то $\tau_x = \tau^*(t)$. Таким образом, формула (6.12) даёт нам совместную плотность случайных величин $\xi^*(t)$ и $\tau^*(t)$. Отсюда

$$\begin{aligned} p_{\tau^*(t)}(u) &= \int_0^\infty p_{\xi^*(t),\tau^*(t)}(y, u)\, dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \int_0^\infty \frac{y}{\sigma^2 u} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}}\, dy = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u(t-u)}}, \qquad 0 < u < t.$$

Парадоксальность этого результата состоит в том, что плотность распределения времени достижения траекторией своего максимума увеличивается к концам отрезка $[0, t]$, т. е. максимум скорее всего будет достигнут либо в самом начале, либо в самом конце промежутка наблюдения за винеровским процессом. Если мы обратимся к функции распределения случайной величины $\tau^*(t)$, то получим после несложных вычислений

$$F_{\tau^*(t)}(u) = \int_0^u p_{\tau^*(t)}(\tilde{u})\, d\tilde{u} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{u}{t}}, \qquad 0 < u < t.$$

Это равенство носит название *закон арксинуса*.

7. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В этом разделе мы будем рассматривать случайные процессы $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями в поле комплексных чисел.

Назовём случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, *стационарным в узком смысле*, если для любого фиксированного $t_0 > 0$ все стохастические свойства процесса $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, и процесса $\xi(t + t_0)$, $t \geqslant 0$, совпадают. В частности, $M\xi(t) = M\xi(t + t_0)$ для любого $t_0 > 0$ и ковариационная функция $R_\xi(t, u) = R_\xi(t - u, 0)$, другими словами, $R_\xi(\,\cdot\,)$ есть функция разности времён. Однако стационарность в узком смысле, очевидно, подразумевает значительно более жёсткое требование совпадения всех конечномерных распределений процессов $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, и $\xi(t+t_0)$, $t \geqslant 0$. Это условие, как правило, крайне трудно проверить. Поэтому в дальнейшем мы сформулируем условие стационарности с помощью менее ограничительных, легко проверяемых условий для двух его первых моментов, о которых мы говорили выше.

Определение 7.1. Случайный (комплекснозначный) процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, называется *стационарным в широком смысле*, если выполнены следующие условия:

$$M\xi(t) = M\xi(0) = \text{const},$$

$$\operatorname{cov}(\xi(t), \xi(u)) \stackrel{\text{def}}{=\!=} M(\xi(t) - M\xi(t))\overline{(\xi(u) - M\xi(u))} = R_\xi(t - u)$$

(напомним, черта над выражением означает комплексное сопряжение).

В дальнейшем мы будем рассматривать понятие стационарности только в широком смысле, не оговаривая этого каждый раз особо, т. е. отождествлять термины «стационарный» и «стационарный в широком смысле».

Кроме того, всюду далее мы для простоты формул будем считать, что $M\xi = 0$. Если $M\xi(t)$ известно, то всегда можно сделать сдвиг $\xi(t) \mapsto \xi(t) - M\xi(t)$ процесса на неслучайную функцию (постоянную величину в случае стационарного процесса) и получить процесс с нулевым математическим ожиданием.

Напомним общие (присущие не только стационарным процессам) свойства ковариационной функции: $R_\xi(t, u) = \overline{R_\xi(u, t)}$ для любых $t, s > 0$, и для любых комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$

$$\sum_{j,k=1}^{n} R_\xi(t_j, t_k) z_j \bar{z}_k = M\left|\sum_{j=1}^{n} z_i\bigl(\xi(t_i) - M\xi(t_j)\bigr)\right|^2 \geqslant 0.$$

Для стационарного случайного процесса эти свойства, очевидно, записываются как

$$\begin{gathered} R_\xi(s) = \overline{R_\xi(-s)}, \quad -\infty < s < \infty, \\ \sum_{j,k=1}^{n} R_\xi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geqslant 0, \qquad t_1, \ldots, t_n \geqslant 0, \quad z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}. \end{gathered} \tag{7.1}$$

7.1. Стационарные процессы с дискретным временем. Мы уделим основное внимание стационарным процессам с дискретным временем (случайным последовательностям), поскольку утверждения и выкладки в этом случае являются более простыми и наглядными, чем в случае непрерывного времени, но, с другой стороны, дают полное представление о теории.

Пусть $\xi_n = \xi(t_n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Условие стационарности принимает вид

$$M\xi_n = 0, \qquad \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_m) = M\xi_n \bar{\xi}_n = R_\xi(n - m), \qquad m, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пример 7.12. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Другими словами,

$$M\xi_n = 0, \qquad R_\xi(n - m) = \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_m) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & n - m = 0, \\ 0, & m - n \neq 0 \end{cases}$$

для всех $m, n = 0, 1, 2, \ldots$. Такой процесс, разумеется, является стационарным. Можно также отметить, что для любого целого n

$$R_\xi(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, dF(\lambda), \tag{7.2}$$

где

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}, \qquad F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(\tilde{\lambda})\, d\tilde{\lambda}, \qquad -\pi < \lambda \leqslant \pi. \tag{7.3}$$

В самом деле, при $n = 0$

$$R_\xi(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} = 1,$$

а при $n \neq 0$

$$R_\xi(n) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda n)\, d\lambda + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\lambda n)\, d\lambda \right\} = 0.$$

На первый взгляд, неочевидно, зачем мы написали тривиальные формулы (7.2) и (7.3). Но в них легко увидеть, с одной стороны, преобразование Фурье для ковариационной функции; с другой стороны, мы имеем выражения, схожие с традиционными формулами теории вероятностей для математического ожидания, в которых $f(\,\cdot\,)$ играет роль плотности распределения, а $F(\,\cdot\,)$ – функции распределения. В данном случае «плотность распределения» постоянная.

Определение 7.2. Функции $F(\,\cdot\,)$ и $f(\,\cdot\,)$, заданные равенствами (7.2), называются соответственно *спектральной функцией* и *спектральной плотностью* стационарного случайного процесса с дискретным временем.

Определение 7.3. Стационарный случайный процесс с дискретным временем со спектральной плотностью $f(\lambda) = \mathrm{const} = 1/2\pi$, $-\pi < \lambda \leqslant \pi$, называется *дискретным белым шумом.*

Пример 7.13. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ – некоррелированные действительнозначные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $D\alpha_k = \sigma_k^2$ для $k = 1, \ldots, N$. Положим

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, e^{i\lambda_k n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.4}$$

где λ_k – неслучайные числа, $-\pi \leqslant \lambda_1 < \cdots < \lambda_N < \pi$. Покажем, что $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ есть стационарная последовательность. Очевидно, что в силу $M\alpha_k = 0$ мы имеем $M\xi_n = 0$. Далее,

$$\operatorname{cov}(\xi_n, \xi_m) = M\xi_n\bar{\xi}_m = M\left\{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, e^{i\lambda_k n} \sum_{\tilde{k}=1}^{N} \alpha_{\tilde{k}} \, e^{-i\lambda_{\tilde{k}} m}\right\} =$$

$$= \sum_{k,\tilde{k}=1}^{N} e^{i(\lambda_k n - \lambda_{\tilde{k}} m)} M\alpha_k\alpha_{\tilde{k}} = \sum_{k=1}^{N} e^{i\lambda_k (n-m)} \sigma_k^2 = R_\xi(n-m),$$

где мы воспользовались тем, что $M\alpha_k\alpha_{\tilde{k}} = \sigma_k^2 \, \delta_{k\tilde{k}}$. Видно, что последовательность $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ удовлетворяет условиям стационарности. Положим

$$F_\xi(\lambda) = \sum_{k:\ \lambda_k < \lambda} \sigma_k^2,$$

тогда функция $F_\xi(\,\cdot\,)$ по своим свойствам практически идентична функции распределения дискретной случайной величины, принимающей значения λ_k с «вероятностью» σ_k^2: эта функция не убывает, непрерывна слева, равна нулю при $\lambda \leqslant \lambda_1$, постоянна на каждом интервале $(\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ и испытывает скачок в точке λ_k, равный

$$\sigma_k^2 = F_\xi(\lambda_k + 0) - F_\xi(\lambda_k) = F_\xi(\lambda_{k+1}) - F_\xi(\lambda_k), \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Здесь мы положили по определению $\lambda_{N+1} = \pi$, и тогда $F_\xi(\lambda_{N+1}) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2$. Поскольку, вообще говоря, $\sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \neq 1$, мы видим, что единственное отличие функции $F_\xi(\,\cdot\,)$ от функции распределения дискретной случайной величины заключается в отсутствии условия нормировки при $\lambda \to \pi - 0$, т. е. $F_\xi(\lambda) \neq 1$ при $\lambda > \lambda_N$.

Ковариационную функцию $R_\xi(\,\cdot\,)$, как и в предыдущем примере, можно записать через интеграл типа математического ожидания, но теперь для «дискретного» распределения,

$$R_\xi(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \, dF(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} e^{i\lambda_k (n-m)} \big(F_\xi(\lambda_{k+1}) - F_\xi(\lambda_k)\big) = \sum_{k=1}^{N} e^{i\lambda_k (n-m)} \sigma_k^2.$$

Спектральная плотность в данном случае не существует.

Спектральное предоставление ковариационной функции. Имеет место теорема Герглотца, аккуратное математическое доказательство которой мы проводить не будем, сосредоточив своё внимание на «физическом смысле» утверждения.

Теорема 7.1. *Для любой ковариационной функции $R_\xi(\,\cdot\,)$ стационарной случайной последовательности $\{\xi_n\}$ имеет место формула*

$$R_\xi(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, dF_\xi(\lambda), \tag{7.5}$$

где $F_\xi(\,\cdot\,)$ – некоторая неубывающая функция, для которой интеграл понимается в смысле Лебега–Стильтьеса.

Набросок доказательства. Пусть N – некоторое натуральное число и переменная $\lambda \in [-\pi, \pi)$. Пусть

$$f_\xi^{(N)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k,\tilde{k}=1}^{N} R_\xi(k-\tilde{k})\, e^{-i\lambda k} e^{i\lambda \tilde{k}}.$$

Положив $z_k = e^{-i\lambda k}$, мы получим, что для любого $\lambda \in [-\pi, \pi)$

$$f_\xi^{(N)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k,\tilde{k}=1}^{N} R_\xi(k-\tilde{k}) z_k \bar{z}_{\tilde{k}} \geqslant 0.$$

Перейдём от суммирования по квадратной решётке индексов $k, \tilde{k} = 1, \ldots, N$ к повторному суммированию сначала по узлам с постоянным значением $m = k - \tilde{k}$, а затем по всем допустимым m. Поскольку каждое слагаемое

$$R_\xi(k-\tilde{k})\, e^{-i\lambda k} e^{i\lambda \tilde{k}} = R_\xi(m) e^{-i\lambda m}$$

постоянно при фиксированном m и, очевидно, $|m| = |k - \tilde{k}| = 0, 1, \ldots, N-1$, мы имеем

$$f_\xi^{(N)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{|m|<N} N(m) \cdot R_\xi(m) e^{-i\lambda m},$$

где $N(m)$ – число узлов решётки индексов $k, \tilde{k} = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих условию $k - \tilde{k} = m$. Нетрудно найти этот коэфиициент: $N(m) = N - |m|$. Итак,

$$f_\xi^{(N)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{|m|<N} (N - |m|) R_\xi(m) e^{-i\lambda m} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m|<N} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R_\xi(m) e^{-i\lambda m} \geqslant 0.$$

Далее,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_\xi^{(N)}(\lambda)\, d\lambda = \sum_{|m|<N} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R_\xi(m) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} e^{-i\lambda m}\, d\lambda.$$

Интеграл в правой части равенства (вместе с множителем $1/2\pi$) даёт δ_{nm}, отсюда имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_\xi^{(N)}(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} R_\xi(n)\left(1 - \dfrac{|n|}{N}\right), & \text{если} \quad |n| < N, \\ 0, & \text{если} \quad |n| \geqslant N. \end{cases}$$

При $N \to \infty$ получаем
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_\xi^{(N)}(\lambda)\, d\lambda \to R_\xi(n). \tag{7.6}$$
Пусть $F_\xi^{(N)}(\,\cdot\,)$ – первообразная функции $f_\xi^{(N)}(\,\cdot\,)$,
$$F_\xi^{(N)}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_\xi^{(N)}(\tilde{\lambda})\, d\tilde{\lambda},$$
тогда $f_\xi^{(N)}(\lambda)\, d\lambda = dF_\xi^{(N)}(\lambda)$ и соотношение (7.6) принимает вид
$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, dF_\xi^{(N)}(\lambda) = R_\xi(n). \tag{7.7}$$
Теперь запишем <u>формальную</u> цепочку равенств для предела в левой части последнего равенства:
$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, dF_\xi^{(N)}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \lim_{N\to\infty} dF_\xi^{(N)}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, dF_\xi(\lambda),$$
где, конечно же, для каждого из преобразований требуется строгое математическое доказательство. В результате этих выкладок получаем искомую формулу (7.5).

Замечание 7.9. Если сходится ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_\xi(n)|$, то мы имеем возможность сделать преобразование Фурье
$$R_\xi(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_\xi(\lambda)\, d\lambda, \qquad f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda n} R_\xi(n),$$
в этом случае формула (7.5) получается тривиально, если положить
$$F_\xi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_\xi(\tilde{\lambda})\, d\tilde{\lambda}.$$
Таким образом, теорема Герглотца применяется, когда ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_\xi(n)|$ расходится.

Замечание 7.10. Очевидно, что
$$D\xi(n) = R(0) = \int_{-\pi}^{\pi} dF_\xi(\lambda) = F_\xi(\pi) - F_\xi(-\pi) = F_\xi(\pi),$$
где мы учли, что $F_\xi(-\pi) = 0$ по определению спектральной функции.

7.2. Спектральное представление стационарного случайного процесса. Формула (7.4) в примере 7.13 даёт пример того, что стационарный случайный процесс представим в виде суммы гармонических сигналов $e^{i\lambda_k n}$ со случайными амплитудами. Покажем (опять же на «физическом» уровне строгости), что любой стационарный процесс с дискретным временем допускает подобное спектральное разложение:
$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\, Z_\xi(d\lambda),$$

где и само равенство, и дифференциал $Z_\xi(d\lambda)$ требуют аккуратного определения, поскольку ξ_n – случайная величина. Понятно, что, поскольку $e^{i\lambda n}$ неслучайно, вся «случайность» правой части равенства должна быть сосредоточена в $Z_\xi(d\lambda)$, т. е. $Z_\xi(d\lambda)$ – *стохастический дифференциал*. Он, по всей видимости, должен получиться в результате некоторого предельного перехода в семействе случайных величин $Z_\xi(\Delta\lambda)$ при $|\Delta\lambda| \to 0$, где $\Delta\lambda$ – интервал значений λ, а $|\Delta\lambda|$ – его длина. Сформулируем основные черты получающейся конструкции в общем случае, а потом построим стохастический дифференциал, порождённый именно нашим стационарным случайным процессом ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$ (здесь нам удобнее считать, что $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$).

Ортогональная случайная мера. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Рассмотрим семейство $\mathbb{D}$ всевозможных интервалов $\Delta x = [x_1, x_2) \subset [a, b)$ и отвечающее им семейство случайных величин

$$Z(\Delta x)\colon \Omega \to \mathbb{C}, \qquad \Delta x \in \mathbb{D},$$

т. е. в сущности некий специфический (по своему аргументу) случайный процесс. Наложим на $Z(\Delta x)$ следующие требования:

• существуют моменты первого и второго порядка

$$MZ(\Delta x) = 0, \qquad D(\Delta x) = M|Z(\Delta x)|^2 = m(\Delta x) < \infty, \tag{7.8}$$

функция $m(\,\cdot\,)\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}_+$ называется *структурной функцией*;

• если интервал Δx представи́м как объединение двух непересекающихся[4] интервалов, $\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x$, то с вероятностью единица

$$Z(\Delta x) = Z(\Delta_1 x) + Z(\Delta_2 x) \tag{7.9}$$

(аддитивность с вероятностью единица);

• если интервал Δx представи́м как объединение счётного числа непересекающихся интервалов, $\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x + \cdots$, то в среднем квадратичном

$$Z(\Delta x) = Z(\Delta_1 x) + Z(\Delta_2 x) + \cdots,$$

другими словами,

$$M\left|Z\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k x\right) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta_k x)\right|^2 \to 0, \qquad n \to \infty \tag{7.10}$$

(счётная аддитивность в среднем квадратичном смысле);

• если $\Delta_1 x \cap \Delta_2 x = \varnothing$, то

$$\operatorname{cov}(Z(\Delta_1 x), Z(\Delta_2 x)) = MZ(\Delta_1 x)\overline{Z(\Delta_2 x)} = 0, \tag{7.11}$$

последнее свойство мы назовём *ортогональностью* семейства случайных величин $Z(\Delta x)$, $\Delta x \in \mathbb{D}$, разъяснив смысл этого термина чуть ниже.

[4]) Отсутствие пересечения мы, как обычно, подчёркиваем, применяя знак плюс вместо знака объединения множеств.

Определение 7.4. Функция $Z(\,\cdot\,)$, ставящая в соответствие интервалу $\Delta x \in \mathbb{D}$ случайную величину и обладающая свойствами (7.8)–(7.11), называется *ортогональной стохастической мерой* на множестве интервалов $\mathbb{D}$.

Из сформулированных выше свойств (7.9) и (7.11) вытекает, что структурная функция $m(\,\cdot\,)$, заданная в (7.8), обладает свойством аддитивности: для непересекающихся интервалов $\Delta_1 x$ и $\Delta_2 x$ мы имеем

$$
\begin{aligned}
m(\Delta_1 x + \Delta_2 x) &= M|Z(\Delta_1 x + \Delta_2 x)|^2 = M|Z(\Delta_1 x) + Z(\Delta_2 x)|^2 = \\
&= M|Z(\Delta_1 x)|^2 + MZ(\Delta_1 x)\overline{Z(\Delta_2 x)} + M\overline{Z(\Delta_1 x)}Z(\Delta_2 x) + M|Z(\Delta_2 x)|^2 = \\
&= M|Z(\Delta_1 x)|^2 + M|Z(\Delta_2 x)|^2 = m(\Delta_1 x) + m(\Delta_2 x).
\end{aligned}
$$

Кроме того, условие (7.10) влечёт

$$
\lim_{n\to\infty} M\left|\sum_{k=1}^{n} Z(\Delta_k x)\right|^2 = M\left|Z\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k x\right)\right|^2,
$$

или, с учётом конечной аддитивности выражения в левой части равенства,

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(\Delta_k x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} m(\Delta_k x) = m\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k x\right),
$$

и мы имеем счётную аддитивность функции $m(\,\cdot\,)$ на множестве всех интервалов, содержащихся в $[a, b)$. Используя эти свойства, можно доопределить функцию $m(\,\cdot\,)$ на все подмножества интервала $[a, b)$, которые можно получить как конечные или счётные объединения непересекающихся интервалов $\Delta x \in \mathbb{D}$. В результате получим, что $m(\,\cdot\,)$ – счётно-аддитивная мера на сигма-алгебре борелевских подмножеств интервала $[a, b)$.

Стохастическая мера, порождённая случайной последовательностью. Введём некоторые важные общие понятия.

Рассмотрим множество $\mathcal{H}$ комплекснозначных случайных величин ξ таких, что

$$
M\xi = 0, \qquad M|\xi|^2 < \infty, \tag{7.12}
$$

и множество $\mathcal{L}^2$ комплекснозначных функций $e(\,\cdot\,)$, заданных на интервале $[-\pi, \pi)$, таких, что

$$
\int_{-\pi}^{\pi} |e(\lambda)|^2\, dF_\xi(\lambda) < \infty. \tag{7.13}
$$

Определим во введённых множествах стандартным образом линейные комбинации $a\xi + b\eta$ для $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ и $ae + bg$ для $e, g \in \mathcal{L}^2$ с произвольными коэффициентами $a, b \in \mathbb{C}$. Нетрудно видеть, что в силу неравенства $|x + y|^2 \leqslant 2|x|^2 + 2|y|^2$ эти линейные комбинации удовлетворяют условиям (7.12) и (7.13), таким образом, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}^2$ являются линейными пространствами. Определим в этих пространствах два скалярных произведения

$$
\langle \xi, \eta \rangle = \operatorname{cov}(\xi, \eta) = M\xi\bar{\eta}, \qquad (e, g) = \int_{-\pi}^{\pi} e(\lambda)\overline{g(\lambda)}\, dF_\xi(\lambda) \tag{7.14}
$$

и отвечающие им нормы (мы используем одно и то же обозначение нормы в обоих пространствах)

$$\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{M|\xi|^2}, \qquad \|e\| = \sqrt{(e,e)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |e(\lambda)|^2 \, dF_\xi(\lambda)}. \tag{7.15}$$

Пожалуй, главным для нас свойством введённых пространств является их полнота по соответствующим нормам (7.15), т. е. условия

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\xi_n - \xi_m\| = 0, \qquad \lim_{n,m\to\infty} \|e_n - e_m\| = 0$$

равносильны тому что найдутся элементы $\xi \in \mathcal{H}$ и $e \in \mathcal{L}^2$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|e_n - e\| = 0$$

(здесь, разумеется, $\{\xi_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \subset \mathcal{H}$ и $\{e_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \subset \mathcal{L}^2$).

Теперь применим введённые понятия к нашей задаче построения стохастической меры. Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – стационарная случайная последовательность со спектральной функцией $F_\xi(\,\cdot\,)$, заданной равенством (7.5). Рассмотрим набор гармонических функций $e_n(\lambda) = e^{i\lambda n}$, $\lambda \in [-\pi, \pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $\xi_n \in \mathcal{H}$, $e_n \in \mathcal{L}^2$ и в силу (7.5)

$$\langle \xi_n, \xi_m \rangle = M\xi_n\bar{\xi}_m = R_\xi(n-m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-m)} \, dF_\xi(\lambda) = (e_n, e_m), \tag{7.16}$$

где $\xi_n \in \mathcal{H}$ и $e_n \in \mathcal{L}^2$. Кроме того, сходимость в среднем квадратичном, заданную в условии (7.10), можно записать как

$$\left\| Z\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k x\right) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta_k x) \right\|^2 \to 0, \qquad n \to \infty,$$

а условие (7.11) означает, что $\langle Z(\Delta_1 x), Z(\Delta_2 x) \rangle = 0$ при $\Delta_1 x \cap \Delta_2 x = \varnothing$, и это объясняет термин «ортогональность».

Установим взаимно однозначное соответствие между $\xi_n \in \mathcal{H}$ и $e_n \in \mathcal{L}^2$:

$$\xi_n \longleftrightarrow e_n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \, .$$

Распространим это соответствие на конечные и счётные линейные комбинации указанных элементов:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k \longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k \longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \tag{7.17}$$

где бесконечные суммы понимаются, конечно, как пределы частичных сумм по нормам соответствующих пространств:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\,\cdot\,) - \sum_{k=1}^{n} (\,\cdot\,) \right\|^2 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Очевидно, что в силу (7.16)

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k \Big\|^2 = \sum_{k,\tilde{k}=1}^{n} c_k \bar{c}_{\tilde{k}} \langle \xi_k, \xi_{\tilde{k}} \rangle = \sum_{k,\tilde{k}=1}^{n} c_k \bar{c}_{\tilde{k}} (e_k, e_{\tilde{k}}) = \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \Big\|^2, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

таким образом, либо обе указанные последовательности частичных сумм фундаментальны (или, что эквивалентно, сходятся), либо обе они не являются фундаментальными (расходятся).

Замечание 7.11. Если случайные величины ξ_n и ξ_m некоррелированны и имеют единичную дисперсию, другими словами, $R(n-m) = M\xi_n\bar{\xi}_m = \delta_{nm}$, то в силу (7.16) мы получаем $\langle \xi_n, \xi_m \rangle = (e_n, e_m) = \delta_{nm}$, и это согласуется с тем, что в данном случае $f_\xi(\lambda) = (1/2\pi)$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_n(\lambda)\overline{e_m(\lambda)}\, dF_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} e^{-i\lambda m}\, d\lambda = \delta_{nm}.$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы определить стохастическую меру. Пусть интервал $\Delta\lambda = [\lambda_1, \lambda_2) \subset [-\pi, \pi)$. Зададим индикаторную функцию интервала $\Delta\lambda$ равенством

$$\chi_{\Delta\lambda}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \Delta\lambda, \\ 0, & \lambda \notin \Delta\lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in [-\pi, \pi).$$

Запишем <u>формальное</u> разложение

$$\chi_{\Delta\lambda}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\Delta\lambda)\, e_k(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\Delta\lambda)\, e^{i\lambda k}, \tag{7.18}$$

не обосновывая возможность такого представления и не объясняя алгоритм нахождения коэффициентов разложения. Здесь, как и везде выше, бесконечная сумма понимается как предел последовательности частичных сумм по норме в пространстве $\mathcal{L}^2$ из (7.15). Поскольку, таким образом, последовательность частичных сумм фундаментальна, также является фундаментальной отвечающая ей по формуле (7.17) последовательность частичных сумм в пространстве $\mathcal{H}$, следовательно, существует случайная величина

$$Z_\xi(\Delta\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\Delta\lambda)\xi_k,$$

где бесконечная сумма понимается как предел в среднем квадратичном смысле (по норме в пространстве $\mathcal{H}$). При этом $Z_\xi(\Delta\lambda) \in \mathcal{H}$, другими словами, $MZ_\xi(\Delta\lambda) = 0$ и $M|Z_\xi(\Delta\lambda)|^2 < \infty$.

Совершим (опять-таки формальный) предельный переход под знаком математического ожидания и воспользуемся спектральным представление ковариационной функции:

$$M|Z_\xi(\Delta\lambda)|^2 = M\Big| \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|<n} c_k(\Delta\lambda)\xi_k \Big|^2 = \lim_{n\to\infty} M\Big| \sum_{|k|<n} c_k(\Delta\lambda)\xi_k \Big|^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|,|\tilde{k}|<n} c_k(\Delta\lambda)\overline{c_{\tilde{k}}(\Delta\lambda)} M\xi_k\xi_{\tilde{k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|,|\tilde{k}|<n} c_k(\Delta\lambda)\overline{c_{\tilde{k}}(\Delta\lambda)} R_\xi(k-\tilde{k}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k|,|\tilde{k}|<n} c_k(\Delta\lambda)\overline{c_{\tilde{k}}(\Delta\lambda)} e^{i\lambda(k-\tilde{k})}\, dF_\xi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\Delta\lambda) e^{i\lambda k} \right|^2 dF_\xi(\lambda),$$

где мы опускаем математическое обоснование того, что знак предельного перехода можно занести внутрь интеграла (последнее равенство). Вспоминая, что мы имеем разложение (7.18), получаем

$$M|Z_\xi(\Delta\lambda)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_{\Delta\lambda}(\lambda)|^2\, dF_\xi(\lambda) = \int_{\Delta\lambda} dF_\xi(\lambda), \tag{7.19}$$

т. е. спектральная характеристика $M|Z_\xi(\Delta\lambda)|^2 = m(\Delta\lambda)$ в данном случае есть интеграл от спектральной функции по интервалу $\Delta\lambda$.

Нетрудно показать ортогональность построенной меры: пусть $\Delta_1\lambda \cap \Delta_2\lambda = \varnothing$, тогда по аналогии с предыдущей цепочкой равенств получаем (вновь опуская математическое обоснование того, что знак предельного перехода можно занести внутрь интеграла)

$$MZ_\xi(\Delta_1\lambda)\overline{Z_\xi(\Delta_2\lambda)} = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{\Delta_1\lambda}(\lambda)\overline{\chi_{\Delta_2\lambda}(\lambda)}\, dF_\xi(\lambda) = 0,$$

поскольку $\chi_{\Delta_1\lambda}(\lambda)\overline{\chi_{\Delta_2\lambda}(\lambda)} = \chi_{\Delta_1\lambda}(\lambda)\chi_{\Delta_2\lambda}(\lambda) \equiv 0$ вследствие отсутствия пересечения интервалов.

Интеграл по случайной мере. Построение интеграла начнём, как обычно, с интеграла от простых функций. Рассмотрим разбиение интервала $[-\pi,\pi)$ точками

$$-\pi = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \pi$$

и функцию, кусочно-постоянную на интервалах $\Delta_k\lambda = [\lambda_{k-1}, \lambda_k)$,

$$g(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, \chi_k(\lambda), \qquad \chi_k(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \Delta_k\lambda, \\ 0, & \lambda \notin \Delta_k\lambda. \end{cases}$$

Для такой функции положим по определению

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, Z_\xi(\Delta_k\lambda).$$

Очевидно, что $MI = 0$ в силу $MZ_\xi(\Delta_k\lambda) = 0$.

Отметим, что кусочно-постоянные функции образуют в $\mathcal{L}^2$ линейное многообразие, т. е. линейная комбинация двух кусочно-постоянных функций также является кусочно-постоянной. В самом деле, пусть функции $g(\,\cdot\,)$ и $h(\,\cdot\,)$ постоянны на интервалах, заданных соответственно разбиениями

$$-\pi = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \pi \quad \text{и} \quad -\pi = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_m = \pi.$$

Объединим все точки разбиения в одно множество $\nu_1, \dots \nu_r$ и упорядочим его:

$$-\pi = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_r = \pi, \qquad \min(m,n) \leqslant r \leqslant n+m,$$

здесь каждое $\nu_j = \lambda_k$ или $\nu_j = \mu_l$ при некоторых k и l. Другими словами, каждый интервал $(\nu_{j-1}, \nu_j]$ либо совпадает с одним из интервалов $(\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, либо является его частью, потому что между точками разбиения λ_{k-1} и λ_k попала одна из точек второго разбиения $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$. Аналогичная картина имеет место и для второго разбиения: каждый интервал $(\nu_{j-1}, \nu_j]$ либо совпадает с одним из интервалов $(\mu_{l-1}, \mu_l]$, либо является его частью. Если

$$g(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, \chi_k(\lambda), \qquad h(\lambda) = \sum_{l=1}^{m} h_l\, \chi_l(\mu),$$

то для $a, b = \mathrm{const}$

$$ag(\lambda) + bh(\lambda) = \sum_{j=1}^{r} (ag_j^* + bh_j^*)\, \chi_j(\nu),$$

где $ag_j^* + bh_j^* = ag_k + bh_l$ при k и l, для которых точки ν_{j-1}, ν_j совпадают с границами или лежат строго внутри интервалов $\Delta_k\lambda$ и $\Delta_m\mu$ постоянства функций g и h.

Лемма 7.6. *Пусть*

$$g(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} g_k\, \chi_k(\lambda), \qquad I = \sum_{k=1}^{n} g_k\, Z_\xi(\Delta_k\lambda).$$

Тогда

$$\|I\|^2 = \|g\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k\lambda} |g_k|^2\, dF_\xi(\lambda), \tag{7.20}$$

где нормы случайной величины I и функции g определяются соответственно первым и вторым равенством в (7.15).

Доказательство. Вычислим указанные нормы. Имеем

$$\|I\|^2 \overset{\text{def}}{=\!=} M|I|^2 = M\left|\sum_{k=1}^{n} g_k Z_\xi(\Delta_k\lambda)\right|^2 =$$

$$= \sum_{k,\tilde{k}=1}^{n} g_k \bar{g}_{\tilde{k}} M Z_\xi(\Delta_k\lambda)\overline{Z_\xi(\Delta_{\tilde{k}}\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} |g_k|^2 M|Z_\xi(\Delta_k\lambda)|^2,$$

где при $k \neq \tilde{k}$ мы воспользовались равенством $MZ_\xi(\Delta_k\lambda)\overline{Z_\xi(\Delta_{\tilde{k}}\lambda)} = 0$ (ортогональностью меры). Учтём формулу (7.19), получим

$$\|I\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |g_k|^2 M|Z_\xi(\Delta_k\lambda)|^2 = \sum_{k=1}^{n} |g_k|^2 \int_{\Delta_k\lambda} dF_\xi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k\lambda} |g_k|^2\, dF_\xi(\lambda). \tag{7.21}$$

С другой стороны,

$$\|g\|^2 \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^2\, dF_\xi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{k=1}^{n} g_k \chi_k(\lambda)\right|^2 dF_\xi(\lambda) =$$

$$= \sum_{k,\tilde{k}=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} g_k \bar{g}_{\tilde{k}}\, \chi_k(\lambda)\overline{\chi_{\tilde{k}}(\lambda)}\, dF_\xi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} |g_k|^2 \chi_k(\lambda)\, dF_\xi(\lambda),$$

где мы учли, что $\tilde{\chi}_k(\lambda)\overline{\tilde{\chi}_{\tilde{k}}(\lambda)} = \delta_{k\tilde{k}}$ при всех $\lambda \in [-\pi, \pi)$. Отсюда

$$\|I\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k \lambda} |g_k|^2 \, dF_\xi(\lambda). \tag{7.22}$$

Сравнивая правые части равенств (7.21) и (7.22), получаем (7.20). Лемма доказана.

Перейдём к построению интеграла от функции более общего вида. Пусть функция $g(\,\cdot\,)\colon [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ представима как предел по норме пространства $\mathcal{L}^2$,

$$g(\lambda) = \lim_{n\to\infty} g_n(\lambda),$$

где функции $g_n(\,\cdot\,)$, $n = 1, 2, \ldots$, кусочно-постоянные,

$$g_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} g_k^{(n)} \, \chi_k^{(n)}(\lambda), \qquad \chi_k^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \Delta_k^{(n)}\lambda, \\ 0, & \lambda \notin \Delta_k^{(n)}\lambda; \end{cases}$$

здесь $\Delta_k^{(n)}\lambda$, $k = 1, \ldots n$, – разбиение интервала $[-\pi, \pi)$, причём максимальная длина интервала разбиения стремится к нулю при $n \to \infty$. Наличие предела влечёт фундаментальность последовательности $\{g_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2 \, dF_\xi(\lambda) \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

Функция, стоящая под знаком модуля в последнем соотношении, является кусочно-постоянной как линейная комбинация кусочно-постоянных функций. Разбиение интервала $[-\pi, \pi)$ на интервалы постоянства функции $g_n(\,\cdot\,) - g_m(\,\cdot\,)$, очевидно, является более мелким, поэтому максимальная длина интервала постоянства функции $g_n(\,\cdot\,) - g_m(\,\cdot\,)$ не больше, чем максимальная длина интервала постоянства для каждой из функций $g_n(\,\cdot\,)$ и $g_m(\,\cdot\,)$ в отдельности, и стремится к нулю при $n, m \to \infty$.

Если мы положим $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то в силу леммы 7.6

$$\|g_n - g_m\|^2 = \|I_n - I_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2 \, dF_\xi(\lambda),$$

таким образом, фундаментальность последовательности $\{g_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \subset \mathcal{L}^2$ имеет место тогда и только тогда, когда фундаментальна последовательность $\{I_n\}_{n=\overline{1,\infty}} \subset \mathcal{H}$. Отсюда вытекает, что если

$$g(\lambda) = \lim_{n\to\infty} g_n(\lambda),$$

то существует предел (в среднем квадратичном смысле) последовательности интегралов, который естественно назвать интегралом от функции $g(\,\cdot\,)$ по стохастической мере:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} g_k^{(n)}\, Z_\xi(\Delta_k^{(n)}\lambda) \right). \tag{7.23}$$

Для аккуратного завершения построения интеграла по случайной мере следует доказать, что предел в (7.23) не зависит от представления функции $g(\cdot)$ в виде предела кусочно-постоянных функций. Это вытекает из следующих простейших рассуждений. Пусть

$$g(\lambda) = \lim_{n\to\infty} g_n(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(\lambda),$$

другими словами, $\|g - g_n\| \to 0$ и $\|g - \tilde{g}_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда

$$\|g_n - \tilde{g}_n\| \leqslant \|g_n - g\| + \|g - \tilde{g}_n\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Тогда, как показано выше, при $n \to \infty$ имеют место сходимости

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda) \to I, \qquad \tilde{I}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}_n(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda) \to \tilde{I},$$

где I и $\tilde{I}$ – некоторые случайные величины. При этом функция $g_n(\,\cdot\,)-\tilde{g}_n(\,\cdot\,)$ кусочно-постоянная, поэтому $\|I_n - \tilde{I}_n\| = \|g_n - \tilde{g}_n\| \to 0$, где равенство норм вытекает из леммы 7.6. Таким образом,

$$\|I - \tilde{I}\| \leqslant \|I - I_n\| + \|I_n - \tilde{I}_n\| + |\tilde{I}_n - \tilde{I}\| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

а это возможно, только если $\|I - \tilde{I}\| = 0$. По неравенству Чебышёва

$$P(|I - \tilde{I}| > \varepsilon) \leqslant \frac{M|I - \tilde{I}|^2}{\varepsilon^2} = \frac{\|I - \tilde{I}\|^2}{\varepsilon^2} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, тем самым $I = \tilde{I}$ с вероятностью единица.

Теорема 7.2. *Для каждого члена ξ_m стационарной случайной последовательности справедливо представление в виде интеграла по случайной мере*:

$$\xi_m = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}\, Z_\xi(d\lambda). \tag{7.24}$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое разбиение интервала $[-\pi, \pi)$ и приближение функции $e_n(\lambda) = e^{i\lambda m}$, $\lambda \in [-\pi, \pi)$, функцией, кусочно-постоянной на интервалах разбиения:

$$-\pi = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = \pi, \qquad E_n^{(m)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k m}\, \chi_k(\lambda).$$

Пусть

$$I_n^{(m)} = \int_{-\pi}^{\pi} E_n^{(m)}(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k m} Z_\xi(\Delta_k \lambda).$$

Покажем, что

$$M|\xi_m - I_n^{(m)}|^2 = M|\xi_m|^2 + M I_n^{(m)} \bar{\xi}_m + M \bar{I}_n^{(m)} \xi_m + M|I_n^{(m)}| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Найдём каждое из слагаемых. Во-первых, очевидно,

$$M|\xi_m|^2 = D\xi_m = d^2. \tag{7.25}$$

Во вторых, в силу ортогональности меры и равенства (7.19)

$$
\begin{aligned}
M|I_n^{(m)}|^2 &= \sum_{k=1}^{n} M|e^{i\lambda_k m} Z_\xi(\Delta_k\lambda)|^2 = \sum_{k=1}^{n} M|Z_\xi(\Delta_k\lambda)|^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} dF_\xi(\lambda) = d^2,
\end{aligned} \tag{7.26}
$$

где мы использовали равенство

$$
\sum_{k=1}^{n} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} dF_\xi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} dF_\xi(\lambda) = R_\xi(0) = d^2. \tag{7.27}
$$

Для расчёта самого сложного, а именно перекрёстных членов, вспомним, что мера интервала задаётся как

$$
Z_\xi(\Delta_k\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(\Delta_k\lambda)\xi_j,
$$

поэтому

$$
\begin{aligned}
MI_n^{(m)}\bar{\xi}_m &= M\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_k m} c_j(\Delta_k\lambda)\xi_j\bar{\xi}_m = M\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k m} c_j(\Delta_k\lambda)\xi_j\bar{\xi}_m = \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k m} c_j(\Delta_k\lambda) M\xi_j\bar{\xi}_m = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k m} c_j(\Delta_k\lambda) R_\xi(j-m) = \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_k m} c_j(\Delta_k\lambda) e^{i\lambda(j-m)}\, dF_\xi(\lambda) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\lambda_k-\lambda)m} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(\Delta_k\lambda) e^{i\lambda j}\right) dF_\xi(\lambda) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\lambda_k-\lambda)m}\, \chi_k(\Delta_k\lambda)\, dF_\xi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} e^{i(\lambda_k-\lambda)m}\, dF_\xi(\lambda).
\end{aligned}
$$

В этой длинной цепочке равенств мы опустили обоснование законности внесения математического ожидания под знак бесконечной суммы (переход от первой ко второй строке), а также внесения бесконечной суммы под знак интеграла (переход от третьей ко четвёртой строке). Кроме того, мы воспользовались тем, что

$$
\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(\Delta_k\lambda) e^{i\lambda j} = \chi_k(\Delta_k\lambda)
$$

по определению стохастической меры, для перехода от четвёртой строке к пятой. Аналогично

$$
M\bar{I}_n^{(m)}\xi_m = M\overline{I_n^{(m)}\bar{\xi}_m} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} e^{-i(\lambda_k-\lambda)m}\, dF_\xi(\lambda)
$$

и

$$
\begin{aligned}
MI_n^{(m)}\bar{\xi}_m + M\bar{I}_n^{(m)}\xi_m &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}(e^{i(\lambda_k-\lambda)m}+e^{-i(\lambda_k-\lambda)m})\,dF_\xi(\lambda) = \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\cos((\lambda_k-\lambda)m)\,dF_\xi(\lambda)
\end{aligned}
$$

Будем считать, что длина $\lambda_k - \lambda_{k-1}$ интервала разбиения достаточно мала при всех $k = 1, \ldots, n$, тогда для любого $\lambda \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k)$

$$
1 \geqslant \cos((\lambda_k-\lambda)m) \geqslant 1-\cos((\lambda_k-\lambda_{k-1})m) \geqslant 1-\cos(\Delta^{(n)}\lambda\cdot m),
$$

где $\Delta^{(n)}\lambda = \max_{1\leqslant k\leqslant n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})$. Таким образом, с учётом (7.27) имеем

$$
2\big(1-\cos(\Delta^{(n)}\lambda\cdot m)\big)d^2 \leqslant MI_n^{(m)}\bar{\xi}_m + M\bar{I}_n^{(m)}\xi_m \leqslant 2d^2,
$$

поэтому

$$
MI_n^{(m)}\bar{\xi}_m + M\bar{I}_n^{(m)}\xi_m \to 2d^2 \quad \text{при} \quad \Delta^{(n)}\lambda \to 0. \tag{7.28}
$$

Объединяя (7.25), (7.26), (7.28), получаем, что $\|\xi_m - I_n^{(m)}\|^2 \to 0$, если максимальная длина интервал разбиения стремится к нулю, что и доказывает (7.24).

7.3. Стационарные процессы с непрерывным временем. Теорию стационарных случайных процессов $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, мы изложим кратко без каких-либо доказательств, записав формулы по аналогии с дискретным случаем.

Пусть $M\xi(t) = 0$, $\operatorname{cov}(\xi(t)\xi(s)) = R_\xi(t-s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие спектральные разложения.

Ковариационная функция представима в виде

$$
R_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dF_\xi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_\xi(\lambda)\,d\lambda, \tag{7.29}
$$

где первый интеграл понимается в смысле Лебега–Стильтьеса и существует всегда, второй интеграл понимается в смысле Лебега (или Римана) и существует не всегда, достаточным условием его существования является

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |R_\xi(t)|\,dt < \infty
$$

и тогда

$$
f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R_\xi(t)\,dt.
$$

В этих формулах $F_\xi(\,\cdot\,)$ – некоторая неубывающая, непрерывная слева функция, $F_\xi(-\infty) = 0$, $F_\xi(\infty) = D\xi(t) = d^2$, и связь между спектральной функцией и спектральной плотностью даётся формулой

$$
F_\xi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_\xi(\tilde{\lambda})\,d\tilde{\lambda}, \qquad -\infty < \lambda < \infty.
$$

Данное спектральное представление составляет *теорему Бохнера–Хинчина.*

Существует стохастическая мера $Z_\xi(\,\cdot\,)$ на множестве всех интервалов действительной прямой такая, что

$$\xi_m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m}\, Z_\xi(d\lambda), \tag{7.30}$$

где правая часть есть предел в среднем квадратичном смысле последовательности интегралов от кусочно-постоянных функций.

Пример 7.14. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ – независимые одинаково распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots$ – моменты наступления событий в пуассоновом потоке $N(t)$, $t \geqslant 0$(интенсивность потока μ). Положим $\xi(t) = \alpha_k$, если момент времени t попал между временами наступления $(k-1)$-го и k-го событий пуассонова потока, $t \in \Delta\tau_k = [\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ (как обычно $\tau_0 = 0$ с вероятностью единица). Случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots$ независимы. Показать, что $\xi(t)$, $t \geqslant 0$ есть стационарный процесс, найти его ковариационную функцию и спектральную плотность.

Решение. Зафиксируем значение $0 < t < \infty$ и рассмотрим полную группу событий

$$B_k = B_k(t) = \{t \in \Delta\tau_k = [\tau_{k-1}, \tau_k)\} = \{\tau_{k-1} \leqslant t,\, \tau_k > t\}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(очевидно, что любой фиксированный момент времени обязательно лежит на временно́й оси между двумя событиями потока $N(t)$). Разложим по этой полной группе функцию распределения сечения $\xi(t)$ (одномерную функцию распределения случайного процесса):

$$F(x,t) \overset{\text{def}}{=\!=} P(\xi(t) < x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi(t) < x \,|\, B_k)\, P(B_k)$$

Если произошло событие $B_k(t)$, то $\xi(t) = \alpha_k$, поэтому

$$P(\xi(t) < x \,|\, B_k(t)) = P(\alpha_k < x \,|\, B_k(t)) = P(\alpha_k < x) = F_\alpha(x),$$

где $F_\alpha(\,\cdot\,)$ – функция распределения любой из случайных величин α_k, и мы воспользовались независимостью α_k от τ_{k-1}, τ_k, т. е. независимостью событий $\alpha_k < x$ и $B_k = B_k(t)$. Отсюда

$$\begin{aligned} M\xi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x\, dF_\alpha(x)\, P(B_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\alpha(x) \Big) P(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} M\alpha_k\, P(B_k) = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы, как обычно, опустили обоснование вынесения знака суммы за знак интеграла и учли, что $M\alpha_k = 0$. Полученную цепочку равенств можно переписать как

$$M\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} M(\xi(t) \,|\, B_k)\, P(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} M\alpha_k\, P(B_k). \tag{7.31}$$

Аналогично,

$$D\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} M(\xi^2(t)\,|\,B_k)\,P(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} M\alpha_k^2\,P(B_k) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \sigma^2.$$

Для расчёта ковариационной функции возьмём два момента времени $0 < t < s$. Каждый из них обязательно попадает между каким-то двумя событиями из пуассонова потока, $t \in \Delta_k\tau$ и $s \in \Delta_j\tau$ (при этом в силу $t < s$ с необходимостью $k \leqslant j$, но нам этот факт не понадобится). Разложим двумерную функцию распределения по полной группе, образованной событиями $B_k(t) \cap B_j(s)$, $k, j = 1, 2, \ldots$, и аналогично (7.31) получим

$$\begin{aligned} M\xi(t)\xi(s) &= \sum_{k,j=1}^{\infty} M(\xi(t)\xi(x)\,|\,B_k(t) \cap B_j(s))\,P(B_k(t) \cap B_j(s)) = \\ &= \sum_{k,j=1}^{\infty} M\alpha_k\alpha_j \cdot P(B_k(t) \cap B_j(s)). \end{aligned}$$

Поскольку $M\alpha_k\alpha_j = M\alpha_k \cdot M\alpha_j = 0$ при $i \neq j$ и $M\alpha_k^2 = \sigma^2$, мы получаем

$$M\xi(t)\xi(s) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k(t) \cap B_k(s)) = \sigma^2 \cdot P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k(t) \cap B_k(s))\right).$$

Событие, стоящее под знаком вероятности в правой части означает, что t и s попали между моментами наступления последовательных событий пуассонова потока, произвольных, но одних и тех же и для t, и для s, другими словами, $t, s \in \Delta\tau_k$ для какого-либо $k = 1, 2, \ldots$. Это равносильно тому, что между t и s не произошло ни одного события из пуассонова потока $N(t)$, таким образом,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k(t) \cap B_k(s))\right) = P(N(s) - N(t) = 0) = e^{-\mu(s-t)}.$$

В результате $M\xi(t)\xi(s) = \sigma^2 e^{-\mu(s-t)}$ при $0 < t < s$. Меняя местами переменные t и s, получаем окончательный ответ для ковариационной функции

$$R_\xi(t, s) = \sigma^2 e^{-\mu|t-s|}, \qquad t, s > 0.$$

Видно, что ковариационная функция зависит от разности времён, поэтому $\xi(t)$, $t \geqslant 0$ есть стационарный процесс.

Далее, заменяя $t - s$ на t, мы будем писать $R_\xi(t) = \sigma^2 e^{-\mu|t|}$ для $-\infty < t < \infty$. Спектральную плотность находим, взяв преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} f_\xi(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R_\xi(t)\,dt = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t - \mu|t|}\,dt = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda t + \mu t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-i\lambda t - \mu t}\,dt \right\} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\mu - i\lambda} + \frac{1}{\mu + i\lambda} \right\} = \frac{\sigma^2\mu}{\pi(\mu^2 + \lambda^2)}, \qquad -\infty < \lambda < \infty. \end{aligned}$$

7.4. Линейные преобразования стационарных процессов. Сначала опять же рассмотрим линейные преобразования стационарных случайных последовательностей. Пусть ξ_n, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ (здесь нам будет удобнее считать, что индекс может принимать и отрицательные значения). Положим

$$\eta_n = \sum_k c_k \xi_{n-k}, \qquad c_k \in \mathbb{C}.$$

Мы ограничимся случаем, когда сумма конечна, причём $k \geqslant 0$. Первое ограничение поможет нам избежать математических проблем, а второе, напротив, придаст линейному преобразованию физический смысл: случайная величина η_n определяется случайными величинами $\xi_n, \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots$, которые отвечают моментам времени, не более поздним, чем момент n. Итак, для $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ положим

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{r} c_k \xi_{n-k}, \qquad c_0, c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}, \tag{7.32}$$

где r – фиксированное натуральное число.

Очевидно, если $M\xi_{n-k} = 0$, то $M\eta_n = 0$. Запишем ковариационную функцию процесса η_n, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Имеем

$$M\eta_n\bar{\eta}_m = M\biggl(\sum_{k=0}^{r} c_k \xi_{n-k} \overline{\sum_{j=0}^{r} c_j \xi_{m-j}}\biggr) =$$
$$= \sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} c_k \bar{c}_j\, M\xi_{n-k}\bar{\xi}_{m-j} = \sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} c_k \bar{c}_j\, R_\xi(n-k-(m-j)).$$

Таким образом, ковариационная функция $R_\eta(\,\cdot\,)$ зависит только от разности $n-m$ индексов, запишем её как (совершая замену $n - m \mapsto n$)

$$R_\eta(n) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} c_k \bar{c}_j\, R_\xi(n-k+j). \tag{7.33}$$

Таким образом, процесс (7.32) является стационарным.

Если исходный процесс имеет вид «белого шума», т. е. $M\xi_k\bar{\xi}_j = R_\xi(k-j) = 0$ при $k \neq j$, то в (7.33) в двойной сумме слагаемые отличны от нуля, только если $n = k-j$. При условии $0 \leqslant k, j \leqslant r$ мы имеем $k - j = 0, \pm1, \ldots, \pm r$. Поэтому $R_\eta(n) = 0$ при $|n| > r$. Величина r в этом случае называется радиусом корреляции, она показывает, насколько «далеко простирается» коррелированность случайных величин η_n, $n = 0, \pm1, \pm2\ldots$, если исходные случайные величины ξ_k, $k = 0, \pm1, \pm2\ldots$, были некоррелированными.

Подставим спектральное представление (7.5) в формулу (7.33), получим

$$R_\eta(n) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} c_k \bar{c}_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-k+j)}\, dF_\xi(\lambda) =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\biggl(\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} c_k \bar{c}_j e^{-i\lambda k} e^{i\lambda j}\biggr) dF_\xi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\biggl|\sum_{k=0}^{r} c_k e^{-i\lambda k}\biggr|^2 dF_\xi(\lambda) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} |\Phi(\lambda)|^2 \, dF_\xi(\lambda),$$

где функция $\Phi(\,\cdot\,)\colon [-\pi, \pi) \mapsto \mathbb{C}$, заданная формулой

$$\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} c_k e^{-i\lambda k}, \tag{7.34}$$

называется *частотной характеристикой* линейного преобразования (7.32).

Записав равенство (7.5) для $R_\eta(\,\cdot\,)$, видим, что

$$R_\eta(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} |\Phi(\lambda)|^2 \, dF_\xi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \, dF_\eta(\lambda),$$

таким образом, спектральная функция и спектральная плотность (если последняя существует) преобразования (7.32) записываются как

$$F_\eta(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2 F_\xi(\lambda), \qquad f_\eta(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2 f_\xi(\lambda). \tag{7.35}$$

Для спектрального представления (7.2) имеем

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{r} c_k \xi_{n-k} = \sum_{k=0}^{r} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-k)} \, Z_\xi(d\lambda) =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \left(\sum_{k=0}^{r} c_k e^{-i\lambda k} \right) Z_\xi(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \Phi(\lambda) \, Z_\xi(d\lambda).$$

Следовательно, спектральные меры связаны равенством

$$Z_\eta(d\lambda) = \Phi(\lambda) Z_\xi(d\lambda). \tag{7.36}$$

Найдём коэффициент ковариации между η_n и ξ_n,

$$M\eta_n \bar{\xi}_m = \sum_{k=0}^{r} c_k M\xi_{n-k}\bar{\xi}_m = \sum_{k=0}^{r} c_k R_\xi(n-k-m),$$

видно, что и в этом случае коэффициент ковариации есть функция разности индексов. Положим

$$R_{\eta\xi}(n-m) = M\eta_n \bar{\xi}_m, \qquad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и назовём $R_{\eta\xi}(\,\cdot\,)$ *взаимной ковариационной функцией* процессов η_n и ξ_m. Нетрудно заметить, что в спектральном представлении

$$R_{\eta\xi}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{r} c_k e^{i\lambda(n-k)} \, dF_\xi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \Phi(\lambda) \, dF_\xi(\lambda),$$

следовательно, спектральная функция для $R_{\eta\xi}(\,\cdot\,)$ имеет вид

$$F_{\eta\xi}(\lambda) = \Phi(\lambda) F_\xi(\lambda), \qquad -\pi \leqslant \lambda < \pi. \tag{7.37}$$

В спектральном представлении линейные преобразования стационарного случайного процесса $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, задаются как

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda),$$

где $Z_\xi(\,\cdot\,)$ – ортогональная спектральная мера из (7.30). По аналогии с дискретным случаем

Случай процесса с непрерывным временем. Линейное преобразование случайного процесса $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, может быть определено разными способами, например как $\eta(t) = \xi(t+T)$, где $T = \mathrm{const}$, или (по аналогии с дискретным случаем) как $\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi(s)\,ds$, где интеграл от случайной величины понимается потраекторно (т. е. для любого $\omega \in \Omega$) или в среднем квадратичном. Разнообразие представлений линейных преобразований тем не менее имеет единую форму в спектральном представлении:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Phi(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda), \tag{7.38}$$

где $\Phi(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ – некоторая функция (частотная характеристика линейного преобразования). Формулы (7.35) и (7.37) при этом также справедливы с точностью до замены области значений λ с интервала $[-\pi, \pi)$ на всю действительную ось.

Для линейных преобразований, приведённых выше в качестве примеров, нетрудно вывести, что $\Phi(\lambda) = e^{i\lambda T}$ для $\eta(t) = \xi(t+T)$ и $\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-i\lambda u}\,d\lambda$ для интегрального преобразования (обратим внимание на аналогию в последнем случае с формулой (7.34)).

Пример 7.15. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t) = a(t) + \nu(t)$, $t \geqslant 0$, где $a(t)$ и $\nu(t)$ – два независимых стационарных процесса с заданными спектральными плотностями $f_a(\,\cdot\,)$ и $f_\nu(\,\cdot\,)$. Процесс $\xi(t)$ будем понимать как измерение полезного сигнала $a(t)$, искажённое погрешностью (шумом) $\nu(t)$. Пусть $\eta(t)$ – линейное преобразование случайного процесса $\xi(t)$, заданое формулой (7.38). Найти частотную характеристику $\Phi(\,\cdot\,)$ в формуле (7.38), которая доставляет минимум среднеквадратичной погрешности оценивания полезного сигнала с помощью линейного преобразования измерения:

$$M|\eta(t) - a(t)|^2.$$

Решение. В силу независимости случайных процессов $a(t)$ и $\nu(t)$

$$\begin{aligned} M\xi(t)\bar{\xi}(s) &= M(a(t)+\nu(t))(\bar{a}(t)+\bar{\nu}(t)) = \\ &= Ma(t)\bar{a}(s) + Ma(t)\cdot M\bar{\nu}(t) + M\bar{a}(t)\cdot M\nu(t) + M\nu(t)\bar{\nu}(s) = \\ &= Ma(t)\bar{a}(s) + M\nu(t)\bar{\nu}(s), \end{aligned}$$

поэтому ковариационная функция и спектральная плотность случайного процесса $\xi(t)$ имеют вид

$$R_\xi(t-s) = R_a(t-s) + R_\nu(t-s), \qquad f_\xi(\lambda) = f_a(\lambda) + f_\nu(\lambda).$$

В силу (7.35) мы также можем записать

$$f_\eta(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2\big(f_a(\lambda) + f_\nu(\lambda)\big)$$

и

$$M|\eta(t)|^2 = R_\eta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda 0}\, dF_\eta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\lambda)|^2 \big(f_a(\lambda) + f_\nu(\lambda)\big)\, d\lambda. \tag{7.39}$$

Обозначим через L линейное преобразование процесса в координатном пространстве, $\eta(t) = L\xi(t)$; его явный вид для нас совершенно не важен, существенно только то, что $L\xi(t) = La(t) + L\nu(t)$, причём $L\nu(t)$ статистически не зависит от $La(t)$ и $a(t)$. Отсюда

$$\begin{aligned} M\eta(t)\bar{a}(t) &= M\big(La(t) + L\nu(t)\big)\bar{a}(t) = \\ &= M[La(t)\,\bar{a}(t)] + M[L\nu(t)\,\bar{a}(t)] \cdot M\bar{a}(t) = M[La(t)\,\bar{a}(t)] = R_{La,a}(t-t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF_{La,a}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dF_a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) f_a(\lambda)\, d\lambda, \end{aligned} \tag{7.40}$$

где мы воспользовались равенством (7.37), позволяющим записать спектральное представление взаимной ковариационной функции линейного преобразования $La(t)$ и самогó случайного процесса $a(t)$. Для математического ожидания $M\bar{\eta}(t)a(s)$ ответ получается комплексным сопряжением (заметим, что значения спектральной плотности действительны):

$$M\bar{\eta}(t)a(t) = \overline{R_{\eta a}(t-t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi(\lambda)} f_a(\lambda)\, d\lambda. \tag{7.41}$$

Собирая формулы (7.39)–(7.41), получаем спектральное представление среднеквадратичной погрешности:

$$\begin{aligned} M|\eta(t) - a(t)|^2 &= M|\eta(t)|^2 - M\eta(t)\bar{a}(t) - M\bar{\eta}(t)a(t) + M|a(t)|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \big\{ |\Phi(\lambda)|^2 \big(f_a(\lambda) + f_\nu(\lambda)\big) - \big(\Phi(\lambda) + \overline{\Phi(\lambda)}\,\big) f_a(\lambda) + f_a(\lambda) \big\}\, d\lambda. \end{aligned}$$

Найдём минимум подынтегральной функции по $\Phi(\lambda) = \Phi = |\Phi| e^{i\phi}$ при каждом фиксированном λ, для чего запишем это выражение как квадратный трёхчлен

$$A|\Phi|^2 - 2B\,\mathrm{Re}\,\Phi + C = A|\Phi|^2 - 2B|\Phi|\cos\phi + C, \tag{7.42}$$

где

$$A = A(\lambda) = f_a(\lambda) + f_\nu(\lambda), \qquad B = B(\lambda) = f_a(\lambda), \qquad C = C(\lambda) = f_a(\lambda).$$

Сначала минимизируем (7.42) по фазе ϕ комплексного числа Φ, другими словами, максимизируем $\cos\phi$ по $\phi \in [0, 2\pi)$: имеем $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$ и $\Phi = |\Phi|$ – неотрицательное действительное число. Найдём очевидную точку минимума $\Phi = B/A$ подынтегрального выражения $A\Phi^2 - 2B\Phi + C$. В результате, возвращаясь к исходным обозначениям, получаем ответ

$$\Phi(\lambda) = \frac{f_a(\lambda)}{f_a(\lambda) + f_\nu(\lambda)}.$$

Запишем также отвечающее этой частотной характеристике (минимальную) погрешность: поскольку

$$A\Phi^2 - 2B\Phi + C = A\left(\Phi - \frac{B}{A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{A},$$

при $\Phi = B/A$ имеем

$$A\Phi^2 - 2B\Phi + C = C - \frac{B^2}{A} = f_a(\lambda) - \frac{f_a^2(\lambda)}{f_a(\lambda) + f_\nu(\lambda)} = \frac{f_\nu(\lambda) f_a(\lambda)}{f_a(\lambda) + f_\nu(\lambda)}$$

и

$$M|\eta(t) - a(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\nu(\lambda) f_a(\lambda)}{f_a(\lambda) + f_\nu(\lambda)}\, d\lambda.$$