2. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ ПО ПРЯМОЙ

Рассмотрим простейшую математическую модель *случайного блуждания*. Пусть точечная частица может совершать только один тип движений: в дискретные моменты времени $t_0, t_1, \ldots$ частица совершает скачок вдоль прямой так, что в момент времени t_{n+1} она оказывается в точке, отстоящей от на единичное расстояние влево или вправо от точки, где она находилась в момент времени t_n. Без ограничения общности можно считать, что координата частицы в любой момент времени есть целое число. Введём на прямой некоторое начало отсчёта и будем писать $\xi_j = m$, если в момент времени t_j частица находилась в точке m; здесь $j = 0, 1, 2, \ldots$ и $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Предположим, что блуждание имеет случайный характер: прыжок вправо частица совершает с вероятностью p, а прыжок влево – с вероятностью q. При этом любые другие перемещения невозможны, так что $p + q = 1$. Примем также, что вероятности скачков не зависят от положения частицы и предыстории её движения. Такая физическая модель с математической точки зрения в точности отвечает схеме независимых испытаний Бернулли с двумя исходами – прыжком вправо, который мы будем называть успехом, и прыжком вправо (неудачей). В рамках этой математической модели все вероятности рассчитываются на основании распределения Бернулли. Пусть частица сделала n прыжков. Вероятность того, что среди этих прыжков будет ровно k прыжков вправо (или, что то же самое, $n - k$ прыжков влево) задаётся формулой

$$P = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

При анализе случайных блужданий частицы очень удобно пользоваться понятием (случайной) траектории её движения за n шагов. Она представляет собой набор точек (j, ξ_j), $j = 0, 1, \ldots, n$, на двумерной координатной плоскости, в котором первая координата – это номер члена последовательности, т. е. по сути момент времени $t = j$, а вторая – (случайная) величина, значение которой равно координате частицы в момент времени $t = j$. Для наглядности удобно соединить точки траектории отрезками прямых, на графике получится непрерывная ломаная из n звеньев, координаты узлов которой суть (j, ξ_j), $j = 0, 1, \ldots, n$. При этом смещения за один прыжок $\xi_j - \xi_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, для нашей частицы суть независимые случайные величины, принимающие значения 1 с вероятностью p и -1 с вероятностью q.

Всякая реализация движения частицы за n шагов может быть описана набором $m_0, m_1, \ldots, m_n$ реализаций случайных координат частицы в последовательные моменты времени $t = 0, 1, \ldots, n$, или событием

$$\xi_0 = m_0,\ \xi_1 = m_1,\ \ldots, \xi_n = m_m,$$

или отвечающей такому движению траекторией, которую мы далее будем обозначать как $\mathcal{L}_n(m_0, m_n)$. Все эти описания абсолютно равноправны, и мы будем всеми ими пользоваться. Будем говорить, что траектория $\mathcal{L}_n(m_0, m_n)$ имеет длину n (т. е. под длиной траектории будем понимать не геометрическую длину ломаной, а количество звеньев), начинается в точке $(0, m_0)$ и заканчивается в точке (n, m_n).

При своём движении частица случайным образом «выбирает» одну из возможных траекторий. Для события, вероятность которого задана формулой (2.1), возможными являются все те и только те траектории длины n, в которых ровно k смещений

$m_j - m_{j-1} = 1$. Равенство (2.1) при этом можно интерпретировать так: вероятность того, что частица пройдет по одной из возможных траекторий, равна $p^k q^{n-k}$, и всего существуют C_n^k таких траекторий, таким образом,

$$P = \underbrace{p^k q^{n-k} + \cdots + p^k q^{n-k}}_{C_n^k \text{ слагаемых}} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

2.1. Вероятность смещения на d единиц вправо или влево. Выведем распределение случайной величины ξ_n. Будем считать, что $P(\xi_0 = m) = 1$. Это отвечает тому, что в начальный момент времени частица достоверно находилась в точке $x = m$ (здесь m – фиксированное число) и далее начала случайное блуждание в соответствии с описанными выше правилами. Пусть d – смещение частицы за n шагов. Найдём $P(\xi_n = m + d)$ для каждого $d \in \mathbb{Z}$.

Замечание 2.1. Справедливо очевидное равенство

$$P(\xi_n = m + d) = P(\xi_n = m + d \,|\, \xi_0 = m), \quad \text{если} \quad P(\xi_0 = m) = 1. \tag{2.2}$$

Представление через условную вероятность удобно, если нам необходимо явно указать, где находилась частица в начальный момент времени.

Смещение частицы и число прыжков влево и вправо связаны простейшим уравнением

$$d = 1 \cdot k + (-1) \cdot (n - k) = 2k - n, \tag{2.3}$$

откуда $k = (n + d)/2$. Понятно, что, поскольку частица сделала ровно n прыжков, число прыжков вправо должно быть целым числом в интервале $[0, n]$, другими словами, $P(\xi_n = m + d) = 0$, если $k = (n + d)/2 \notin \{0, 1, \ldots, n\}$. Если же указанное ограничение выполнено, то в рамках нашей модели блужданий мы можем воспользоваться распределением Бернулли (2.1):

$$P(\xi_n = m + d) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = \frac{n + d}{2}, \tag{2.4}$$

при обязательном условии $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Замечание 2.2. Ограничение $0 \leqslant k \leqslant n$ по формуле (2.3) влечёт $|d| \leqslant n$. Это можно понять и без расчётов: если $|d| > n$, то частица «не успевает» дойти из начальной в конечную точку за n шагов, даже двигаясь строго в одном направлении (налево при $d < 0$ и направо при $d > 0$). Ограничение на значения k согласовано и с (2.4): биномиальный коэффициент C_n^k не определён при $k \notin \{0, 1, \ldots, n\}$. Мы можем даже считать формулу (2.4) верной при любом k, если положим по определению $C_n^k = 0$ для $k \notin \{0, 1, \ldots, n\}$. Число шагов n и смещение d должны иметь как целые числа одну чётность. Вероятность (2.4) не зависит от начального положения m и определяется только числом шагов n (номером члена последовательности) и смещением d.

2.2. Вероятность непопадания в ноль. Найдём вероятность того, что частица, стартовав из точки $m > 0$, за n шагов пришла в точку $m + d > 0$ и при этом ни разу не попала в точку с координатой ноль:

$$P_n^+(m, m + d) = P(\xi_n = m + d, \xi_{n-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = m). \tag{2.5}$$

Другими словами, мы ищем вероятность того, что траектория $\mathcal{L}_n(m, m+d)$ целиком лежит выше горизонтальной оси. Как мы уже отмечали, вероятность прохода по любой траектории $\mathcal{L}_n(m, m+d)$ равна $p^k q^{n-k}$, где $k = (n+d)/2$, поэтому вероятность (2.5) равна

$$P_n^+(m, m+d) = N_n^+(m, m+d) \cdot p^k q^{n-k},$$

где $N_n^+(m, m+d)$ – число траекторий из m в $m+d$ длины n, не пересекающих горизонтальную ось и не касающихся этой оси. Очевидно, что

$$N_n^+(m, m+d) = C_n^k - N_n^-(m, m+d),$$

где C_n^k – полное число траекторий из $(0, m)$ в $(n, m+d)$, а $N_n^-(m, m+d)$ – число траекторий из $(0, m)$ в $(n, m+d)$, хотя бы один раз пересекающих горизонтальную ось.

Найдём $N_n^-(m, m+d)$. Каждую интересующую нас траекторию, хотя бы один раз пересекающую ось, будем как обозначать как $\bar{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$. Для любой такой траектории найдется хотя бы один шаг, на котором частица окажется в точке с нулевой координатой. Вычислим $N_n^-(m, m+d)$ с помощью так называемого *принципа отражения.*

Утверждение 2.1.

$$N_n^-(m, m+d) = C_n^{\bar{k}}, \quad \text{если} \quad \bar{k} = \frac{n+2m+d}{2} = k+m \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{2.6}$$

Если $\bar{k} \notin \{0, 1, \ldots, n\}$, *то* $N_n^-(m, m+d) = 0$, *другими словами, проход из точки* m *в точку* $m+d$ *с заходом в ноль невозможен.*

Доказательство. Возьмём любую траекторию $\bar{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$. обозначим через j <u>минимальный</u> номер шага, для которого $\xi_j = 0$, т. е. j – момент <u>первого</u> пересечения или касания траекторией $\bar{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ оси. Таким образом, наша траектория проходит через точку с координатами $(j, 0)$.

Для каждой траектории $\bar{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ существует траектория $\mathcal{L}_n(-m, m+d)$ той же длины n, идущую из точки $(0, -m)$ в точку $(n, m+d)$, сформированная по следующему правилу отражения. Часть траектории $\mathcal{L}_n(-m, m+d)$, лежащая левее точки $(j, 0)$, получена симметричным отражением такой же части траектории $\bar{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ относительно горизонтальной оси, а в последующих точках обе траектории совпадают. Заметим, что в моменты времени, предшествующие $t = j$, часть траектории $\bar{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$ лежит строго выше оси, следовательно, часть траектории $\mathcal{L}_n(-m, m+d)$ лежит строго ниже оси.

Теперь попробуем установить обратное соответствие. <u>Любое</u> блуждание, начинающееся в точке $-m < 0$ и заканчивающееся в точке $m+d > 0$, с необходимостью пройдет через точку 0 (начавшись ниже оси и закончившись выше оси, непрерывная траектория обязательно ось пересечёт).

Рассмотрим траекторию $\mathcal{L}_n(-m, m+d)$, отвечающую этому блужданию. Как и выше, обозначим через j минимальный номер шага, для которого $\xi_j = 0$ (момент первого пересечения или касания оси), и отразим симметрично относительно горизонтальной оси часть этой траектории, лежащую левее точки $(j, 0)$, а при $t \geqslant j$

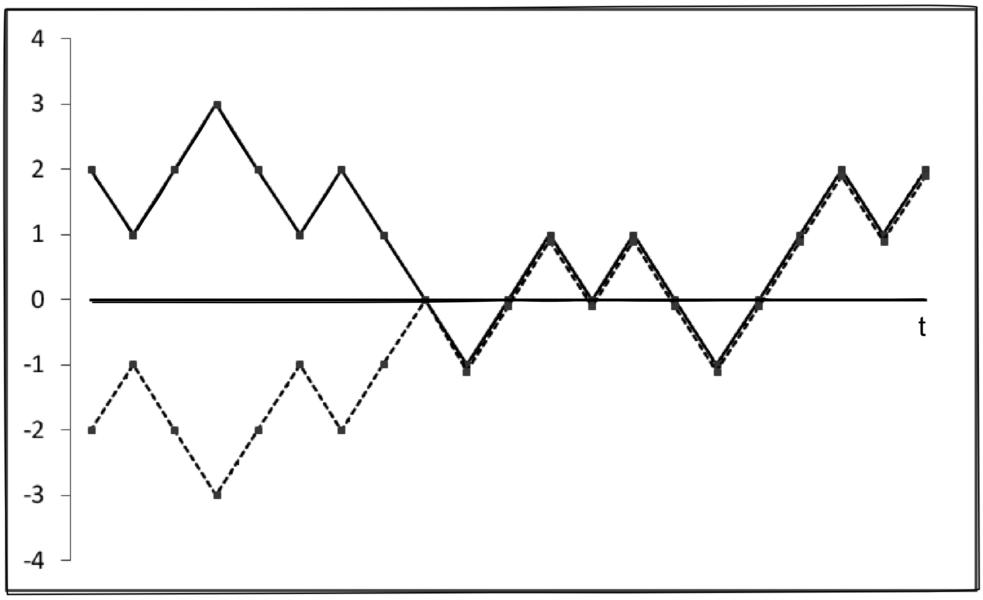

Рис. 1. Принцип отражения.

продолжим двигаться по траектории $\mathcal{L}_n(-m, m+d)$. В результате получим траекторию $\bar{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$, которая также проходит через точку $(j, 0)$, т. е. пересекает ось t или касается ее (см. рис. 1).

Таким образом, блуждание из m в $m+d$, проходящее через ноль, и любое блуждание из точки $-m$ в точку $m+d$ находятся во взаимно однозначном соответствии.

Найдём количество траекторий вида $\mathcal{L}_n(-m, m+d)$. При таком блуждании смещение частицы за n шагов равно $\bar{d} = m + d - (-m) = 2m + d$. Для того чтобы сместиться на такое расстояние, нужно сделать ровно $\bar{k} = (n + 2m + d)/2$ шагов вправо. Таким образом, количество траекторий вида $\mathcal{L}_n(-m, m+d)$ равно $C_n^{\bar{k}}$. В силу взаимно однозначного соответствия количество траекторий вида $\mathcal{L}_n(-m, m+d)$ совпадает с количеством траекторий вида $\bar{\mathcal{L}}_n(m, m+d)$, т. е.

$$N_n^-(m, m+d) = C_n^{\bar{k}}, \qquad \bar{k} = \frac{n + 2m + d}{2}.$$

Формула (2.6) доказана.

Итак, для $m > 0$ и $m + d > 0$

$$P_n^+(m, m+d) = (C_n^k - C_n^{\bar{k}})p^k q^{n-k}, \qquad k = \frac{n+d}{2}, \quad \bar{k} = \frac{n + 2m + d}{2} = k + m. \quad (2.7)$$

Как и в формуле (2.4), хотя бы одно из чисел $k = (n + d)/2$ и $\bar{k} = (n + 2m + d)/2$ должно принадлежать множеству $\{0, 1, \ldots, n\}$, иначе $P_n^+(m, m+d) = 0$. Если мы примем, как уже говорилось выше, соглашение, что $C_n^k = 0$, если $k \notin \{0, 1, \ldots, n\}$, то равенство нулю вероятности получится само собой.

Нетрудно понять, что если в рамках наших соглашений $C_n^{\bar{k}} \neq 0$, то и $C_n^k \neq 0$, причём $C_n^k \geqslant C_n^{\bar{k}}$. Это можно показать и напрямую, но куда проще обратиться к «физическим» соображениям. В самом деле, если $C_n^{\bar{k}} \neq 0$, то у частицы существует возможность пройти из точки m в точку $m + d$ без захода в ноль. Однако C_n^k – это число всех возможных путей без всяких ограничений, разумеется, таких путей не меньше, чем путей, не проходящих через ноль, $C_n^k \geqslant C_n^{\bar{k}}$. Нетрудно также понять, что, например, в случае $k = n$ в формуле (2.7) с необходимостью $C_n^{\bar{k}} = 0$, потому что в этом случае можно пройти $m > 0$ в $m + d > 0$, только двигаясь детерминированно вправо, и этот путь никогда не проходит через ноль.

2.3. Первое возвращение в исходную точку. Будем считать, что частица начинает движение из точки $m = 0$, другими словами $P(\xi_0 = 0) = 1$. Обозначим через R_{2r} событие, заключающееся в том, что частица в первый раз вернулась в начальную точку в момент $t = 2r > 0$ (очевидно, что для возврата в исходную точку требуется четное число шагов). Найдем

$$P(R_{2r}) = P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} \neq 0, \ldots, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Если $\xi_0 = 0$, то либо $\xi_1 = 1$, либо $\xi_1 = -1$. В соответствии с этим представим R_{2r} в виде $R_{2r} = R_{2r}^+ + R_{2r}^-$ (как обычно в теории вероятностей сумма – это объединение несовместных событий), при этом отвечающая событию R_{2r}^+ траектория $\mathcal{L}_{2r}^+(0,0)$ лежит строго выше горизонтальной оси всюду, кроме точек $(0,0)$ и $(2r,0)$. Поскольку частица совершает только шаги длины единица, это возможно, только если при $t = 2r - 1$ частица находилась в точке $m_{2r-1} = 1$, и мы имеем

$$P(R_{2r}^+) = P(\xi_{2r} = 0, \xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Пусть сначала $r = 1$. Событие $R_2^{\pm}$ означает, что частица за два шага вернулась в исходную точку, т. е. совершила два прыжка в разные стороны, поэтому мы имеем $P(R_2^{\pm}) = pq$ и $P(R_{2r}) = 2pq$.

При $r > 1$ мы можем записать следующее равенство:

$$P(R_{2r}^+) = p \cdot P(\xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \,|\, \xi_1 = 1) \cdot q.$$

Здесь мы воспользовались тем, что на первом шаге частица прыгнула вправо (это происходит с вероятностью p), затем движение шло без захода в ноль по некоторой траектории длины $2r-1$, которая начинается из точки $(1,1)$ и заканчивается в точке $(1,1)$, и, наконец, на последнем прыжке частица перешла из точки с координатой 1 в точку с координатой 0 (это происходит с вероятностью q). С учётом (2.7) для координат частицы в моменты времени $t = 2, \ldots, 2r-1$ получаем

$$P(\xi_{2r-1} = 1, \xi_{2r-2} > 0, \ldots, \xi_2 > 0, \,|\, \xi_1 = 1) = P_{2r-2}^+(1,1) = (C_{2r-2}^k - C_{2r-2}^{\bar{k}})p^k q^{2r-2-k},$$

где

$$k = \frac{2r-2+0}{2} = r-1, \qquad \bar{k} = \frac{2r-2+2+0}{2} = r.$$

В итоге имеем

$$P(R_{2r}^+) = pq \cdot (C_{2r-2}^{r-1} - C_{2r-2}^r)p^{r-1}q^{r-1} = (C_{2r-2}^{r-1} - C_{2r-2}^r)p^r q^r.$$

Отметим, что множитель $p^r q^r$ можно было предугадать: чтобы за $2r$ шагов вернуться в начальную точку, необходимо сделать по r шагов вправо и влево.

Проведём тривиальные преобразования:

$$C_{2r-2}^{r-1} - C_{2r-2}^{r} = \frac{(2r-2)!}{(r-1)!\,(r-1)!}\left(1 - \frac{r-1}{r}\right) = \frac{(2r-2)!}{(r-1)!\,(r-1)!r} =$$
$$= \frac{(2r-2)!\,(2r-1)2r}{(r-1)!\,(r-1)!\,r(2r-1)2r} = \frac{1}{2}\frac{(2r)!}{r!\,r!\,(2r-1)} = \frac{1}{2}\frac{C_{2r}^{r}}{2r-1}.$$

Тогда

$$P(R_{2r}^{+}) = \frac{1}{2}\frac{C_{2r}^{r}}{2r-1}(pq)^r.$$

Вероятность $P(R_{2r}^{-})$ блуждания из точки $m = 0$ в точку $m_{2r} = 0$ с дополнительным ограничением $m_1 = -1$, $m_2 < 0, \ldots, m_{2r-1} < 0$ получается из $P(R_{2r}^{-})$ взаимной заменой p на q, поэтому $P(R_{2r}^{-}) = P(R_{2r}^{+})$, и мы имеем окончательный ответ:

$$P(R_{2r}) = P(R_{2r}^{-}) + P(R_{2r}^{+}) = \frac{C_{2r}^{r}}{2r-1}(pq)^r \tag{2.8}$$

для $r > 1$. Заметим, что в случае $r = 1$ с помощью непосредственной подстановки получаем $P(R_2) = 2pqr$, что совпадает с полученным ранее ответом. Таким образом, мы можем считать, что формула (2.8) верна для всех $r = 1, 2\ldots$

События R_{2r} несовместны при разных r, поэтому для события R, заключающегося в том, что частица когда-либо вернется в исходную точку, имеем

$$P(R) = \sum_{r=1}^{\infty} P(R_{2r}) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_{2r}^{r}}{2r-1}(pq)^r = 1 - \sqrt{1-4pq}.$$

Для любых $p, q \geqslant 0$ при условии $p + q = 1$ верно неравенство $0 \leqslant pq \leqslant 1/4$. В случае $p = q = 1/2$ получаем $P(R) = 1$, и частица всегда (с вероятностью единица) возвращается в исходную точку. Если $p \neq q$, то $P(R) < 1$, в предельном случае $p = 0$ (или $q = 0$) вероятность возврата равна нулю, что, впрочем, является очевидным фактом, поскольку в этом случае частица совершает детерминированное движение в одном направлении.

2.4. Общий случай возвращений в исходную точку. Пусть V_{2n} – событие, заключающееся в том, что частица в момент времени $t = 2n$ оказалась в начальной точке, при этом неважно, была ли она в этой точке ранее или нет. При $n = 1, 2, \ldots$ в соответствии с (2.4)

$$P(V_{2n}) = P(\xi_{2n} = 0 \,|\, \xi_0 = 0) = C_{2n}^{n}(pq)^n, \tag{2.9}$$

поскольку событие V_{2n} происходит тогда и только тогда, когда частица за $2n$ шагов сместилась на расстояние $d = 0$.

Выедем ещё одну полезную формулу. Представим событие V_{2n} в виде разложения в сумму по моментам первого попадания частицы в точку ноль:

$$V_{2n} = \sum_{r=1}^{n-1} \widetilde{R}_{2r,2n} + R_{2n},$$

где $\widetilde{R}_{2r,2n}$ означает, что при $2n$ шагах блуждания первое возвращение в ноль произошло в момент времени $2r < 2n$, далее частица двигалась произвольным образом (возможно, вновь возвращаясь в ноль) и при $t = 2n$ опять же оказалась в нуле. Событие R_{2n}, как и выше, означает, что при $t = 2n$ частица вернулась в исходную точку в первый раз. Траектория такого блуждания начинается в точке $(0, 0)$, проходит через точку $(2r, 0)$ и заканчивается в точке $(2n, 0)$, причём в первой части пути в моменты времени $t = 1, \dots, 2r - 1$ частица в ноль не заходит. Обозначим такую траекторию как

$$\widetilde{\mathcal{L}}^{\,0}_{2n|2r} = \mathcal{L}^{+}_{2r}(0,0) \cdot \mathcal{L}_{2n-2r}(0,0),$$

используя некий условный (не имеющий никакого арифметического смысла) знак «умножения» траекторий. Вероятность прохода по любой из возможных траекторий вида $\mathcal{L}^{+}_{2r}(0,0)$, т. е. прохода из нуля в ноль без промежуточных заходов в ноль, равна $P(R_{2r})$. Вероятность прохода по любой из возможных траекторий вида $\mathcal{L}_{2n-2r}(0,0)$, равна $P(V_{2n-2r})$, потому что мы имеем событие, заключающееся в том, что частица вышла из нуля и вернулась в него, совершив $2n - 2r$ шагов. Тогда

$$P(\widetilde{R}_{2r,2n}) = P(R_{2r}) \cdot P(V_{2n-2r}).$$

В этих рассуждениях мы самым существенным образом использовали независимость блужданий частицы при $t > 2r$ от всей предыстории её блужданий.

Таким образом,

$$P(V_{2n}) = \sum_{r=1}^{n-1} P(R_{2r})P(V_{2n-2r}) + P(R_{2n}) = \sum_{r=1}^{n} P(R_{2r})P(V_{2n-2r}), \tag{2.10}$$

где мы учли, что $P(V_0) = P(\xi_0 = 0) = 1$.

2.5. Последние возвращения. Найдем вероятность того, что, стартовав из точки $m = 0$, частица в моменты времени $t = 1, 2, \dots, 2n$ не вернется в начало координат. Обозначим указанное событие через B_{2n}. Учитывая результат первого шага, запишем

$$\begin{aligned}
&P(B_{2n}) = P(\xi_{2n} \neq 0, \dots, \xi_2 \neq 0, \xi_1 \neq 0 \,|\, \xi_0 = 0) = P(B^{+}_{2n}) + P(B^{-}_{2n}),\\
&P(B^{+}_{2n}) = P(\xi_{2n} > 0, \dots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0),\\
&P(B^{+}_{2n}) = P(\xi_{2n} < 0, \dots, \xi_2 < 0, \xi_1 = -1 \,|\, \xi_0 = 0).
\end{aligned}$$

Разложим событие B^{+}_{2n} по полной группе событий, отвечающих возможным положениям частицы на $(2n)$-м шаге. Очевидно, что за $2n$ шагов частица смещается на расстояние $1 \cdot k + (-1) \cdot (2n - k) = 2k - 2n$, где k – число шагов вправо ($k = 0, \dots, 2n$), т. е. смещение является чётным числом. Кроме того, с необходимостью $\xi_{2n} \leqslant 2n$ и по условию (в рамках события B^{+}_{2n}) мы имеем $\xi_{2n} > 0$, поэтому $\xi_{2n} = 2s$, $s = 1, \dots, n$. Получаем с учётом скачка вправо на первом шаге

$$\begin{aligned}
P(B^{+}_{2n}) &= \sum_{s=1}^{n} P(\xi_{2n} = 2s, \xi_{2n-1} > 0, \dots, \xi_2 > 0, \xi_1 = 1 \,|\, \xi_0 = 0) =\\
&= \sum_{s=1}^{n} p \cdot P(\xi_{2n} = 2s, \xi_{2n-1} > 0, \dots, \xi_2 > 0 \,|\, \xi_1 = 1).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Имеем

$$P(\xi_{2n} = 2s, \xi_{2n-1} > 0, \ldots, \xi_2 > 0 \,|\, \xi_1 = 1) = P^+_{2n-1}(1, 2s)$$

поскольку речь идёт о проходе по траектории из $(1, 1)$ в $(2n-1, 2s)$ без захода в ноль. Поставляем наши параметры траектории в (2.7): В данном случае в (2.7) $m = 1$, $m + d = 2s$ и n следует заменить на $2n - 1$. Таким образом,

$$k = \frac{2n - 1 + 2s - 1}{2} = n + s - 1, \qquad \bar{k} = \frac{2n - 1 + 2s + 1}{2} = n + s$$

и $(2n-1)-k = n-s$. Заметим, что при $s = n$ невозможно за $2n$ шагов пройти из точки $x = 1$ в точку $x = 2n$ никак, кроме как детерминировано перемещаясь вправо. Это в точности соответствует тому, что при этом $\bar{k} = 2n > 2n - 1$ и биномиальный коэффициент $C^{\bar{k}}_{2n-1}$ в формуле типа (2.7) следует положить равным нулю.

В результате получаем

$$P^+_{2n-1}(1, 2s) = (C^{n+s-1}_{2n-1} - C^{n+s}_{2n-1}) p^{n+s-1} q^{n-s}, \qquad s = 1, \ldots, n - 1$$

и

$$P^+_{2n-1}(1, 2s)\big|_{s=n} = C^{n+s-1}_{2n-1} p^{n+s-1} q^{n-s}.$$

Подставим полученные выражения в (2.11):

$$P(B^+_{2n}) = \sum_{s=1}^{n} C^{n+s-1}_{2n-1} p^{n+s} q^{n-s} - \sum_{s=1}^{n-1} C^{n+s}_{2n-1} p^{n+s} q^{n-s}.$$

В первой сумме сделаем замену $C^{n+s-1}_{2n-1} = C^{n-s}_{2n-1}$. Во второй сумме произведём сдвиг индекса $s \mapsto s + 1$, при этом суммирование станет вестись по $s = 2, \ldots, n$, а $n + s$ заменится на $n + s - 1$, после чего можно вновь учесть, что $C^{n+s-1}_{2n-1} = C^{n-s}_{2n-1}$. Наконец, ко второй сумме (по $s = 2, \ldots, n$) добавим и вычтем одно слагаемое с $s = 1$. В результате всех этих манипуляций вероятность примет вид

$$P(B^+_{2n}) = \sum_{s=1}^{n} C^{n-s}_{2n-1} p^{n+s} q^{n-s} - \sum_{s=1}^{n} C^{n-s}_{2n-1} p^{n+s-1} q^{n-s+1} + C^{n-1}_{2n-1} p^n q^n.$$

В результате получаем

$$P(B^+_{2n}) = \sum_{s=1}^{n} C^{n-s}_{2n-1} p^{n+s} q^{n-s} \left(1 - \frac{q}{p}\right) + C^{n-1}_{2n-1} p^n q^n. \tag{2.12}$$

Вероятность $P(B^-_{2n})$ получается из $P(B^+_{2n})$ взаимной заменой p на q:

$$P(B^-_{2n}) = \sum_{s=1}^{n} C^{n-s}_{2n-1} p^{n-s} q^{n+s} \left(1 - \frac{p}{q}\right) + C^{n-1}_{2n-1} p^n q^n. \tag{2.13}$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить для **симметричных блужданий**, т. е. для случая $p = q = 1/2$. Тогда в выражениях (2.12) и (2.13) останется только одно слагаемое (вне суммы), и мы получаем при $p = q = 1/2$

$$P(B_{2n}) = 2C^{n-1}_{2n-1} p^n q^n = \frac{2n}{n} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!} (pq)^n = C^n_{2n} (pq)^n = \frac{C^n_{2n}}{4^n}. \tag{2.14}$$

Введем случайную величину α_{2n}, равную номеру шага, при котором произошло <u>последнее</u> возвращение в начальную точку при $2n$ шагах блуждания. Выпишем распределение случайной величины α_{2n}:

$$\begin{aligned}P(\alpha_{2n}=2s) &= P(\xi_{2n}\neq 0,\ldots,\xi_{2s+1}\neq 0,\xi_{2s}=0\,|\,\xi_0=0)=\\ &= P(\xi_{2n}\neq 0,\ldots,\xi_{2s+1}\neq 0\,|\,\xi_{2s}=0)P(\xi_{2s}=0\,|\,\xi_0=0)=\\ &= P(B_{2n-2s})P(V_{2s}),\qquad s=1,\ldots,n-1,\end{aligned}$$

или, в явном виде, с учётом (2.9) и (2.14) при $p=q=1/2$

$$P(\alpha_{2n}=2s)=C_{2n-2s}^{n-s}(pq)^{n-s}\cdot C_{2s}^{s}(pq)^{s}=\frac{C_{2s}^{s}C_{2n-2s}^{n-s}}{4^n},\qquad s=1,\ldots,n-1. \tag{2.15}$$

При $s=0$ событие $\alpha_{2n}=0$ равносильно тому, что частица за $2n$ шагов ни разу не вернулась в исходную точку, т. е. событию B_{2n}. Формула (2.15) при этом приобретает вид $P(\alpha_{2n}=0)=P(B_{2n})=C_{2n}^{n}/4^n$ в соответствии с (2.14). При $s=n$ событие $P(\alpha_{2n}=2n)$ рассчитывается по формуле

$$P(\alpha_{2n}=2n)=P(\xi_{2n}=0\,|\,\xi_0=0)=P(V_{2n})=\frac{C_{2n}^{n}}{4^n}.$$

Таким образом, с учётом равенства $C_0^0=1$ формулу (2.15) можно распространить на все допустимые значения s:

$$P(\alpha_{2n}=2s)=C_{2n-2s}^{n-s}(pq)^{n-s}\cdot C_{2s}^{s}(pq)^{s}=\frac{C_{2s}^{s}C_{2n-2s}^{n-s}}{4^n},\qquad s=0,\ldots,n. \tag{2.16}$$

Легко видеть, что $P(\alpha_{2n}=2s)=P(\alpha_{2n}=2n-2s)$. Другими словами, для последнего возврата в начало вероятность вернуться на раннем шаге с номером $2s$ такая же, как аналогичная вероятность на соответствующем шаге $2n-2s$, близком к концу. При больших n можно применить формулу Стирлинга $n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}$ и записать приближённую формулу для (2.16) в случае больших n, s, $n-s$:

$$\begin{aligned}P(\alpha_{2n}=2s) &\approx \frac{\sqrt{2\pi 2s}(2s)^{2s}e^{-2s}\sqrt{2\pi(2n-2s)}(2n-2s)^{2n-2s}e^{-(2n-2s)}}{\left(\sqrt{2\pi s}(s)^s e^{-s}\right)^2\left(\sqrt{2\pi(n-s)}(n-s)^{n-s}e^{-(n-s)}\right)^2 4^s}=\\ &=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{s(n-s)}}=\frac{1}{\pi n}\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}},\qquad z=\frac{s}{n},\quad 0<z<1.\end{aligned}$$

В последнем выражении симметрия $s\leftrightarrow n-s$, которой соответствует $z\leftrightarrow 1-z$, становится ещё более явной. При $z\gtrsim 0$ или $z\lesssim 1$ мала величина s или $n-s$ соответственно, поэтому асимптотика работает плохо. Тем не менее из последней формулы можно увидеть, что момент последнего возвращения частицы в ноль будет с большей вероятностью принимать малые или большие, чем средние значения (минимум вероятности находится в точке $z=1/2$, что отвечает $s=n/2$). Удивительно, что малые и большие значения времени последнего возвращения равновероятны.

Сравнивая (2.16) с формулой (2.9) при $p=q=1/2$, видим, что

$$P(\alpha_{2n}=2s)=P(V_{2s})P(V_{2n-2s}),\qquad s=0,\ldots,n. \tag{2.17}$$

2.6. Распределение времени пребывания на одной стороне. Для симметричных блужданий, начинающихся из нуля, введем случайную величину β_{2n}, которая равна $2k$, если из $2n$ звеньев ломаной $\mathcal{L}_{2n}(0, m_{2n})$ ровно $2k$ звеньев лежат не ниже оси и, соответственно, ровно $2n-2k$ звеньев лежат не выше оси. Найдем распределение случайной величины β_{2n}.

Прежде всего рассмотрим случай $\beta_{2n} = 2n$, когда вся траектория находится в верхней полуплоскости, и найдем

$$P(\beta_{2n} = 2n) = P(\xi_{2n} \geqslant 0, \ldots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0).$$

Очевидно, что для $\tilde{\xi}_n = \xi_n + 1$

$$P(\xi_{2n} \geqslant 0, \ldots, \xi_1 \geqslant 0 \,|\, \xi_0 = 0) = P(\tilde{\xi}_{2n} > 0, \ldots, \tilde{\xi}_1 > 0 \,|\, \tilde{\xi}_0 = 1). \tag{2.18}$$

Как и выше, разложим эту вероятность по возможным положениям частицы на $(2n)$-м шаге (мы уже отмечали, что если число шагов чётно, то и смещение – чётное число, при условии неотрицательности реализаций лежащее в пределах от 0 до $2n$): при $r < n$ имеем

$$\begin{aligned} P(\beta_{2n} = 2n) &= \sum_{r=0}^{n} P(\tilde{\xi}_{2n} = 2r+1, \tilde{\xi}_{2n-1} > 0, \ldots, \tilde{\xi}_1 > 0 \,|\, \xi_0 = 0) = \\ &= \sum_{r=0}^{n} P_{2n}^{+}(1, 2r+1) = \sum_{r=0}^{n} (C_{2n}^{n+r} - C_{2n}^{n+r+1}) p^{n+r} q^{n+r}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

При $r = n$ мы имеем $P(\xi_0 = 0, \xi_1 \geqslant 0, \ldots, \xi_{2n} = 2r) = p^{2n}$, потому что достичь точки $m = 2n$ за $2n$ шагов можно, только когда все скачки совершаются вправо. Мы можем считать, что в случае $r = n$ в правой части равенства (2.19) от выражения в скобках остаётся только первое слагаемое.

Подставим полученные результаты и учтем, что $p = q = 1/2$, получим

$$4^n \cdot P(\beta_{2n} = 2n) = \sum_{r=0}^{n} C_{2n}^{n+r} - \sum_{r=0}^{n-1} C_{2n}^{n+r+1} = \sum_{r=0}^{n} C_{2n}^{n+r} - \sum_{r=1}^{n} C_{2n}^{n+r} = C_{2n}^{n}$$

или, сравнивая с (2.15),

$$P(\beta_{2n} = 2n) = P(\alpha_{2n} = 2n) = \frac{C_{2n}^{n}}{4^n}.$$

Легко показать, что аналогичное утверждение верно и для вероятности $P(\beta_{2n} = 0)$:

$$P(\beta_{2n} = 0) = P(\alpha_{2n} = 0) = \frac{C_{2n}^{n}}{4^n}. \tag{2.20}$$

Покажем, что распределения случайных величин α_{2n}, β_{2n} полностью совпадают:

$$P(\beta_{2n} = 2s) = P(\alpha_{2n} = 2s), \qquad s = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.21}$$

Найдем вероятность того, что $\beta_{2n} = 2s$, при $0 < s < n$. В этом случае в траектории блуждания присутствуют звенья, лежащие как снизу, так и сверху от оси t.

Следовательно, хотя бы один раз частица вернулась в точку ноль. Пусть $2r$ – номер первого возвращения, т. е. произошло событие R_{2r}. Напишем формальное разложение по полной группе событий $\{R_{2r}\}_{r=\overline{1,n}}$:

$$P(\beta_{2n}=2s)=\sum_{r=1}^{n}P(\{\beta_{2n}=2s\}\cap R_{2r})=\sum_{r=1}^{n}P(\{\beta_{2n}=2s)\}\cap(R_{2r}^{+}+R_{2r}^{-}))=$$
$$=\sum_{r=1}^{n}P(\{\beta_{2n}=2s)\}\cap(R_{2r}^{+})+\sum_{r=1}^{n}P(\{\beta_{2n}=2s)\}\cap R_{2r}^{-}))$$

(в последнем выражении мы использовали формулу (2.8)). Если произошли оба события $\beta_{2n}=2s$ и R_{2r}^{+}, то, с одной стороны, ровно $2s$ звеньев лежат не ниже оси t; с другой стороны, $2r$ первых звеньев заведомо лежат в верхней полуплоскости. Поэтому, если $r>s$, события $\beta_{2n}=2s$ и R_{2r}^{+} несовместны. Аналогично, если произошли события $\beta_{2n}=2s$ и R_{2r}^{-}, то в траектории имеются ровно $2n-2s$ звеньев в нижней полуплоскости и в то же время заведомо присутствуют $2r$ таких звеньев. Отсюда, если $r>n-s$, события $\beta_{2n}=2s$ и R_{2r}^{-} несовместны. Итак,

$$P(\beta_{2n}=2s)=\sum_{r=1}^{s}P(\{\beta_{2n}=2s\}\cap R_{2r}^{+})+\sum_{r=1}^{n-s}P(\{\beta_{2n}=2s\}\cap R_{2r}^{-}).$$

Рассмотрим каждое слагаемое в суммах по отдельности. Имеем

$$P(\{\beta_{2n}=2s\}\cap R_{2r}^{+})=P(\{\beta_{2n}=2s\}\,|\,R_{2r}^{+})P(R_{2r}^{+}).$$

Вероятность $P(R_{2r}^{+})$ мы считать умеем. В случае симметричных блужданий

$$P(R_{2r}^{+})=P(R_{2r}^{-})=\frac{1}{2}P(R_{2r}). \tag{2.22}$$

Что касается условной вероятности, то при условии, что первые $2r$ звеньев траектории лежат в верхней полуплоскости, событие $\beta_{2n}=2s$ (ровно $2s$ звеньев лежат в верхней полулоскости) равносильно тому, что в части траектории, отвечающей движению частицы после первого возвращения в ноль, ровно $2s-2r$ звеньев лежат в верхней полуплоскости. Таким образом

$$P(\{\beta_{2n}=2s\}\,|\,R_{2r}^{+})=P(\beta_{2n-2r}=2s-2r).$$

Аналогично

$$P(\{\beta_{2n}=2s)\}\cap R_{2r}^{-})=P(R_{2r}^{-})P(\beta_{2n-2r}=2s)=\frac{P(R_{2r})}{2}P(\beta_{2n-2r}=2s).$$

Объединяя полученные формулы, имеем при $0<s<n$

$$P(\beta_{2n}=2s)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{s}P(R_{2r})P(\beta_{2n-2r}=2s-2r)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-s}P(R_{2r})P(\beta_{2n-2r}=2s). \tag{2.23}$$

Заметим, что (2.23) – рекуррентное соотношение для распределения β_{2n}. Поэтому для доказательства равенства (2.21) воспользуемся индукцией по n. При $n=1$ с помощью непосредственного анализа блужданий получаем (в данном случае речь идёт о двух шагах случайной частицы, и, напомним, β_2 равно числу звеньев траектории, лежащих выше оси, а α_2 равно моменту последнего возвращения в ноль)

$$P(\beta_2 = 0) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = -2) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = 0) = q^2 + qp = \frac{1}{2},$$
$$P(\beta_2 = 2) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 2) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = p^2 + qp = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны,

$$P(\alpha_2 = 0) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = -2) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 2) = q^2 + p^2 = \frac{1}{2},$$
$$P(\alpha_2 = 0) = P(\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = 0) + P(\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = qp + pq = \frac{1}{2},$$

Таким образом, при $n = 1$ равенство (2.21) верно.

Сделаем индукционное предположение с учётом формулы (2.16). Пусть для всех $n' \leqslant n - 1$ имеет место совпадение распределений:

$$P(\beta_{2n'} = 2s) = P(\alpha_{2n'} = 2s) = P(V_{2s})P(V_{2n'-2s}), \quad s = 0, 1, \ldots, n'.$$

Напомним формулу (2.17), а именно $P(\alpha_{2n} = 2s) = P(V_{2s})P(V_{2n-2s})$. Тогда, переходя от $n-1$ к n, для $1 \leqslant s \leqslant n-1$, подставив в (2.23) индукционное предположение, получаем

$$\begin{aligned}
2P(\beta_{2n} = 2s) &= \sum_{r=1}^{s} P(R_{2r})P(\beta_{2n-2r} = 2s - 2r) + \sum_{r=1}^{n-s} P(R_{2r})P(\beta_{2n-2r} = 2s) = \\
&= \sum_{r=1}^{s} P(R_{2r})P(\alpha_{2n-2r} = 2s - 2r) + \sum_{r=1}^{n-s} P(R_{2r})P(\alpha_{2n-2r} = 2s) = \\
&= \sum_{r=1}^{s} P(R_{2r})P(V_{2s-2r})P(V_{2n-2r-(2s-2r)}) + \sum_{r=1}^{n-s} P(R_{2r})P(V_{2s})P(V_{2n-2r-2s}).
\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}
2P(\beta_{2n} = 2s) &= P(V_{2n-2s}) \sum_{r=1}^{s} P(R_{2r})P(V_{2s-2r}) + P(V_{2s}) \sum_{r=1}^{n-s} P(R_{2r})P(V_{2(n-s)-2r}) = \\
&= P(V_{2n-2s})P(V_{2s}) + P(V_{2s})P(V_{2n-2s}),
\end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы учли (2.10). Вновь используя (2.17), получаем

$$2P(\beta_{2n} = 2s) = 2P(\alpha_{2n} = 2s), \qquad s = 1, \ldots, n - 1.$$

Для $s = 0, n$ равенство вероятностей было показано выше. Формула (2.21) доказана.