

### 3. СХОДИМОСТЬ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ЕДИНИЦА

Прежде чем доказывать утверждения, связанные со сходимостью с вероятностью единица, докажем две леммы общего характера.

ЛЕММА 3.1. Для любого счётного набора событий  $A_1, A_2, \dots$  справедливо неравенство

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k), \quad n \leq \infty \quad (3.1)$$

(здесь речь идёт о конечном или счётном объединении событий).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём сначала  $n = 2$ , имеем

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2),$$

отсюда для  $n = 3$  в силу ассоциативности операции объединения

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \leq P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Продолжая подобные рассуждения, получим неравенство (3.1) для любого конечного  $n$ . Для  $n = \infty$  воспользуемся предельным переходом. Очевидно, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k,$$

причём в силу  $B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$  мы имеем монотонность ( $B_n \subset B_{n+1}$ ) последовательности  $B_1, B_2, \dots$ . Таким образом, по теореме о непрерывности вероятности и вследствие неравенства (3.1), уже доказанного для конечного  $n$ , получаем неравенство для  $n = \infty$ :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k). \end{aligned}$$

Заметим, что ряд в правой части неравенства не обязан сходиться и может (формально) быть равен бесконечности. На этом доказательство леммы завершается.

Аналогичные рассуждения доказывают следующую лемму.

ЛЕММА 3.2. Для любого счётного набора событий  $A_1, A_2, \dots$  равенство

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1 \quad (3.2)$$

имеет место тогда и только тогда, когда  $P(A_n) = 1$  для каждого  $n = 1, 2, \dots$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из очевидных соотношений

$$1 = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq P(A_n) \leq 1,$$

получаем, что (3.2) влечёт  $P(A_n) = 1$  для каждого  $n = 1, 2, \dots$ .

Наоборот, если  $P(A_1) = P(A_2) = 1$ , то  $P(A_1 \cup A_2) \geq P(A_k)$  для  $k = 1, 2$ , следовательно,  $P(A_1 \cup A_2) = 1$ , откуда

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Аналогично, если  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1$ , то

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_2) \cup A_3) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Продолжая подобные рассуждения, получаем, что если  $P(A_k) = 1$  для каждого  $k = 1, 2, \dots, n$ , то для любого конечного  $n$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(C_n) = 1, \quad C_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^n A_k. \quad (3.3)$$

Для  $n = \infty$ , как и выше, воспользуемся предельным переходом. Используя равенства

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n,$$

(предельный переход справедлив в силу включения  $C_{n+1} = C_n \cap A_{n+1} \subset C_n$ ), выше доказанное равенство (3.3) и непрерывность вероятности, имеем

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 1.$$

Лемма доказана.

Посмотрим, что вытекает из сходимости ряда в правой части (3.1) при  $n = \infty$ . Сначала вспомним понятия верхнего и нижнего пределов последовательности множеств:

$$\begin{aligned} A^* &= \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \\ A_* &= \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где предельные соотношения вытекают из включений

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k &= A_n \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \supset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k, \\ \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k &= A_n \cap \left(\bigcap_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \subset \bigcap_{k=n+1}^{\infty} A_k \end{aligned}$$

и монотонного поведения соответствующих последовательностей событий.

Следующее утверждение известно как *лемма Бореля–Кантелли*.

ЛЕММА 3.3. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

то  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учётом представления (3.4), теоремы о непрерывности вероятности и оценки (3.1) получаем для  $A^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$

$$P(A^*) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0,$$

где собственно равенство нулю следует из условия сходимости ряда вероятностей.

Можно вспомнить, что верхний предел последовательности множеств есть множество тех элементарных исходов, которые принадлежат бесконечному поднабору (подпоследовательности) множеств из  $A_1, A_2, \dots$ . В условиях леммы Бореля–Кантелли это событие имеет вероятность ноль, а дополнительное к нему – вероятность единица. Таким образом, лемма Бореля–Кантелли может быть сформулирована так: *если  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , то с вероятностью единица происходит только конечное число событий из  $A_1, A_2, \dots$* .

**Сходимость с вероятностью единица.** Рассмотрим последовательность случайных величин  $\xi_n: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Будем говорить, что последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1, \infty}$  сходится с вероятностью единица или, другими словами, почти наверное, если множество

$$P\left\{\omega: \text{существует } \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)\right\} = 1. \quad (3.5)$$

Чуть ниже мы покажем, что множество под знаком вероятности принадлежит сигма-алгебре событий, т. е. вероятность в (3.5) обязательно существует. Кроме того, если выполнено условие (3.5), то соответствие

$$\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega),$$

обязательно является случайной величиной. Этот факт мы оставим без доказательства, поскольку в наших дальнейших рассуждениях предел будет задан априори.

Рассмотрим более подробно определение сходимости с вероятностью единица. Пусть  $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $n \in \{1, 2, \dots\}$  такое, что  $|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon$  для всех  $k \geq n$ . Запишем этот факт в терминах операций над множествами: заменим все условия типа «для любого» операцией пересечения, а все условия типа «существует» – операцией объединения. Получим

$$\begin{aligned} \{\omega: \xi_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)\} &= \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega: |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} = \\ &= \bigcap_{\varepsilon > 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно записать

$$\begin{aligned} \{\omega: \xi_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)\} &= \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < 1/m\} = \\ &= \bigcap_{m=0}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < 1/m\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

заставив индекс в пересечении пробегать счётное множество значений вместо несчётного  $\varepsilon > 0$ . Здесь мы для  $m = 0$  положили  $1/m = \infty$  и

$$\{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \infty\} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношения (3.6) показывают, что множество тех исходов, при которых существует  $\lim \xi_n(\omega)$ , принадлежит сигма-алгебре событий.

Итак, сходимость с вероятностью единица,

$$P\{\omega: \xi_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)\} = 1,$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух равенств

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{\varepsilon > 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}\right) &= 1, \\ P\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < 1/m\}\right) &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

По лемме 3.2 второе из этих равенств эквивалентно тому, что

$$P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < 1/m\}\right) = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Нетрудно сообразить, что в условии (3.8) можно заменить  $1/m$  на  $\varepsilon$ :

$$P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}\right) = 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.9)$$

Эквивалентность (3.8) и (3.9) видна из следующих рассуждений. Пусть

$$A_n(x) = \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < x\}, \quad x > 0.$$

Очевидно, что если  $x_1 \leq x_2$ , то

$$|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < x_1 \implies |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < x_2,$$

или, в терминах множеств,  $A_n(x_1) \subset A_n(x_2)$ , что приводит к  $P(A_n(x_1)) \leq P(A_n(x_2))$ . Учитывая включение  $A_k(x_1) \subset A_k(x_2)$  при нахождении пересечений и объединений, приходим к

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n(x_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k(x_1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k(x_2) = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n(x_2)$$

и

$$P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n(x_1)) \leq P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n(x_2)), \quad \text{если } x_1 \leq x_2.$$

Таким образом, если  $x_1 \leq x_2$  и  $P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n(x_1)) = 1$ , то  $P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n(x_2)) = 1$ .

Теперь вернёмся к доказательству эквивалентности равенств (3.8) и (3.9). Если выполнено (3.8), то, находя для любого  $\varepsilon > 0$  число  $1/m \leq \varepsilon$ , в силу приведённых выше рассуждений получаем (3.9). Если, наоборот, выполнено (3.9), то подберём для данного  $m$  число  $\varepsilon \leq 1/m$ , получим (3.8).

Подведём итог. Сходимость с вероятностью единица,

$$P(\{\omega: \xi_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi(\omega)\}) = 1,$$

имеет место тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$

$$P(\liminf_{n \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}) = 1.$$

Переходя к дополнительным событиям, получим важную для нас лемму.

**ЛЕММА 3.4.** *Последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1, \infty}$  сходится к  $\xi$  с вероятностью единица тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$*

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Объединяя последнюю лемму и лемму Бореля–Кантелли, получаем ещё одно утверждение.

**ЛЕММА 3.5.** *Если для любого  $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < \infty, \quad (3.10)$$

*то последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1, \infty}$  сходится к случайной величине  $\xi$  с вероятностью единица.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В самом деле, по лемме Бореля–Кантелли из (3.10) имеем

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

по лемме 3.4 это влечёт сходимость последовательности  $\{\xi_n\}_{n=1, \infty}$  к случайной величине  $\xi$  с вероятностью единица.

На основании доказанных фактов докажем ещё одно утверждение.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** *Сходимость с вероятностью единица влечёт сходимость по вероятности:*

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{P} \xi, \quad n \rightarrow \infty.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проведём доказательство от противного. Пусть последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1, \infty}$  не сходится по вероятности к случайной величине  $\xi$ . Это означает, что найдётся  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что  $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon_0)$  не стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Это, в свою очередь, означает, что найдётся число  $\delta > 0$  и подпоследовательность  $\{\xi_{n_k}\}_{k=1, \infty}$  такие, что

$$P(|\xi_{n_k} - \xi| \geq \varepsilon_0) \geq \delta, \quad k = 1, 2, \dots,$$

следовательно,

$$P\left(\bigcup_{k=s}^{\infty} \{\omega: |\xi_{n_k}(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon_0\}\right) \geq \delta, \quad s = 1, 2, \dots,$$

и, в силу (3.4),

$$P(\limsup_{k \rightarrow \infty} \{\omega: |\xi_{n_k}(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon_0\}) = \lim_{s \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=s}^{\infty} \{\omega: |\xi_{n_k}(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon_0\}\right) \geq \delta > 0.$$

Это означает, что для подпоследовательности  $\{\xi_{n_k}\}_{k=1, \infty}$  и, следовательно, для всей последовательности  $\{\xi_n\}_{n=1, \infty}$  неверно, что они сходятся к случайной величине  $\xi$  с вероятностью единица.

**Усиленный закон больших чисел.** Напомним, что если случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  попарно некоррелированы,  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$  при любых  $i \neq j$ , и дисперсии этих случайных величин ограничены в совокупности,  $D\xi_k \leq \sigma^2$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) \xrightarrow{P} 0.$$

Это утверждение носит название *закон больших чисел* (в форме Чебышёва) и вытекает из неравенства Чебышёва:

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k)\right| > \varepsilon\right) \leq D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k \leq \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В частности, если  $M\xi_k = \mu$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ , то

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{P} \mu.$$

Докажем, что в этом случае имеет место и сходимость с вероятностью единица. Эта теорема носит название *усиленный закон больших чисел*.

**ТЕОРЕМА 3.1.** *Если  $\xi_1, \xi_2, \dots$  некоррелированы,  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$  при любых  $i \neq j$ , и  $M\xi_k = \mu$ ,  $D\xi_k \leq \sigma^2 < \infty$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ , то*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{п. н.}} \mu.$$

Сделав замену  $\xi_k \mapsto \xi_k - \mu$ , мы будем считать, что  $\mu = 0$ . Поскольку доказательство довольно длинное и в большой степени техническое, разобьём его на две части.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть случайные величины  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  с вероятностью единица принимают неотрицательные значения и

$$P(\alpha_m \geq \varepsilon) \leq O\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad P(\beta_m \geq \varepsilon) \leq O\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad (3.11)$$

т.е. вероятность можно оценить сверху некоторой величиной, которая имеет порядок  $O(1/m^2)$  при  $m \rightarrow \infty$ . Для любого  $n = 1, 2, \dots$  выберем натуральное число  $m_n$  так, чтобы  $m_n^2 < n \leq (m_n + 1)^2$ . Если для всех  $\omega \in \Omega$  верна оценка

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k(\omega) \right| \leq \alpha_{m_n}(\omega) + \beta_{m_n}(\omega), \quad (3.12)$$

то

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (3.11) имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(\alpha_m \geq \varepsilon) < \infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} P(\beta_m \geq \varepsilon) < \infty,$$

отсюда по лемме 3.5  $\alpha_m \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$  и  $\beta_m \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , другими словами, найдутся множества  $A, B \subset \Omega$  такие, что при  $m \rightarrow \infty$

$$\alpha_m(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{при всех } \omega \in A, \quad \beta_m(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{при всех } \omega \in B$$

и при этом  $P(A) = 1, P(B) = 1$ . Тогда на множестве  $A \cap B$  мы имеем для  $m \rightarrow \infty$

$$\alpha_m(\omega) + \beta_m(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{при всех } \omega \in A \cap B, \quad P(A \cap B) = 1.$$

Очевидно, что это же утверждение верно и для любых подпоследовательностей  $\{\alpha_{m_n}\}_{n=1, \infty}$  и  $\{\beta_{m_n}\}_{n=1, \infty}$ . Выбирая эти подпоследовательности так, как сказано в условии теоремы, т.е. из условия  $m_n^2 < n \leq (m_n + 1)^2$ , получаем, что для всех  $\omega \in A \cap B$  (где  $P(A \cap B) = 1$ ) и для всех  $n > 1$

$$0 \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k(\omega) \right| \leq \alpha_{m_n}(\omega) + \beta_{m_n}(\omega) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

что и влечёт

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

ТЕОРЕМА 1.2. Для любого  $n > 1$  и для любых  $n_1, n_2$  таких, что  $n_1 < n \leq n_2$ , существуют такие случайные величины  $\alpha_{n_1}$  и  $\beta_{n_1, n_2}$ , что для любого  $\omega \in \Omega$

$$0 \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k(\omega) \right| \leq \alpha_{n_1}(\omega) + \beta_{n_1, n_2}(\omega), \quad (3.13)$$

и при  $n_1 = m^2$  и  $n_2 = (m + 1)^2$  выполнено условие (3.11).

Доказательство. Всюду в доказательстве мы будем опускать зависимость случайных величин от  $\omega$ , если утверждение верно для любого  $\omega \in \Omega$ .

Начнём с простых неравенств

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \right| \leq \left| \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \xi_k \right| + \left| \frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^n \xi_k \right|, \quad n_1 < n. \quad (3.14)$$

Далее положим

$$\left| \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \xi_k \right| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{n_1}$$

и тем самым определим случайную величину  $\alpha_{n_1}$ , причём, очевидно,  $\alpha_{n_1} \geq 0$  с вероятностью единица.

Для определения случайной величины  $\beta_{n_1, n_2}$  запишем следующее очевидное неравенство, справедливое при  $n_1 < n \leq n_2$ :

$$\left| \frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^n \xi_k \right| \leq \max_{n_1 < r \leq n_2} \left| \frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^r \xi_k \right| \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{n_1, n_2}.$$

Понятно, что  $\beta_{n_1, n_2} \geq 0$  с вероятностью единица.

Подставляя все полученные оценки в (3.14), получаем (при  $n > 1$ )

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \right| \leq \alpha_{n_1} + \beta_{n_1, n_2}, \quad n_1 < n \leq n_2.$$

Итак, мы нашли случайные величины  $\alpha_{n_1}$  и  $\beta_{n_1, n_2}$  такие, что выполнено неравенство (3.13).

Для получения оценок (3.11) применим неравенство Чебышёва (напомним, что  $M\xi_k = 0$ ,  $D\xi_k \leq \sigma^2$ ): для любого  $\varepsilon > 0$

$$P(\alpha_{n_1} \geq \varepsilon) = P\left( \left| \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \xi_k \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D\left( \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \xi_k \right) = \frac{1}{n_1^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n_1} D\xi_k \leq \frac{\sigma^2}{n_1 \varepsilon^2}. \quad (3.15)$$

Далее, событие

$$\beta_{n_1, n_2} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{n < r \leq n_2} \left| \frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^r \xi_k \right| \geq \varepsilon$$

происходит тогда и только тогда, когда найдётся номер  $r$  из интервала значений  $n < r \leq n_2$ , при котором

$$\left| \frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^r \xi_k \right| \geq \varepsilon,$$

что, как обычно, можно переформулировать в терминах объединения множеств:

$$\{\omega : \beta_{n_1, n_2} \geq \varepsilon\} = \bigcup_{r=n_1+1}^{n_2} \left\{ \omega : \left| \frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^r \xi_k \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P(\beta_{n_1, n_2} \geq \varepsilon) &= P\left(\bigcup_{r=n_1+1}^{n_2} \left\{\omega: \left|\frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^r \xi_k\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \\ &\leq \sum_{r=n_1+1}^{n_2} P\left(\left|\frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^r \xi_k\right| \geq \varepsilon\right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где мы воспользовались леммой 3.1. Снова применим неравенство Чебышёва:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^r \xi_k\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} D\left(\frac{1}{n_1} \sum_{k=n_1+1}^r \xi_k\right) = \\ &= \frac{1}{n_1^2 \varepsilon^2} \sum_{k=n_1+1}^r D\xi_k \leq \frac{1}{n_1^2 \varepsilon^2} \sum_{k=n_1+1}^r \sigma^2 = \frac{(r-n_1)\sigma^2}{n_1^2 \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в каждое слагаемое правой части (3.16), получаем

$$\begin{aligned} P(\beta_{n_1, n_2} \geq \varepsilon) &\leq \sum_{r=n_1+1}^{n_2} \frac{(r-n_1)\sigma^2}{n_1^2 \varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n_1^2 \varepsilon^2} (1+2+\dots+(n_2-n_1)) = \\ &= \frac{\sigma^2}{n_1^2 \varepsilon^2} \frac{(n_2-n_1)(n_2-n_1+1)}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставим в правые части (3.15) и (3.17) значения  $n_1 = m^2$  и  $n_2 = (m+1)^2$ . С учётом равенства

$$\frac{(n_2-n_1)(n_2-n_1+1)}{n_1^2} = \frac{(2m+1)(2m+2)}{m^4}$$

получаем из (3.15) и (3.17) искомые оценки (3.11):

$$\begin{aligned} P(\alpha_m \geq \varepsilon) &\leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{m^2} = O\left(\frac{1}{m^2}\right), \\ P(\beta_m \geq \varepsilon) &\leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{(2m+1)(m+1)}{m^4} = O\left(\frac{1}{m^2}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Объединяя утверждения теорем 1.1 и 1.2, получаем доказательство теоремы 3.1.

Как следствие усиленного закона больших чисел получаем утверждение о сходимости частоты к вероятности.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть случайная величина  $\zeta_n$  равна частоте наступлений успехов в  $n$  испытаниях Бернулли с вероятностью успеха  $p$ . Тогда  $\zeta_n \xrightarrow{\text{п. н.}} p$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Представим частоту успеха как  $(\xi_k - \text{число успехов в единичном } (k\text{-м) испытании})$

$$\zeta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad P(\xi_k = 1) = p, \quad P(\xi_k = 0) = q.$$

Тогда случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  независимы,  $M\xi_k = p$ ,  $D\xi_k = pq$ , и мы можем применить к ним теорему 3.1. Получаем  $\zeta_n \xrightarrow{\text{п. н.}} p$ .