4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Теория вероятностей предоставляет один из мощных инструментов для моделирования экспериментов с неопределённым исходом, но применение математических методов теории вероятностей ограничено весьма жёсткими рамками частотного подхода. В самом деле, согласно основополагающему принципу значение вероятности $P(A)$ события A совпадает с частотой этого события в бесконечно длинном ряду повторений случайного эксперимента. При этом предполагается, что каждое повторение эксперимента неотличимо от любого другого с точки зрения условий эксперимента, но подобную «устойчивость» условий трудно ожидать при бесконечно большом числе повторений испытаний. Это приводит к определённым проблемам при эмпирической проверке вероятностных выводов и ограничивает круг явлений, которые могут быть адекватно описаны с помощью теории вероятностей.

С другой стороны, в реальной жизни мы крайне редко используем конкретное значение вероятности события, за исключением случаев, когда говорим об очень малой (практически равной нулю) или очень большой (близкой к единице) вероятности. Говоря о значении $P(A)$, мы едва ли скажем, что оно равно, например, 0.85, скорее сравним его с другой вероятностью, с нулём или единицей. Но для таких выводов нам, возможно, и не потребуется столь точное знание о модели наблюдений, какое требуется в рамках частотного подхода.

Теория возможностей представляет собой сравнительно новый подход к описанию экспериментов с неопределённым исходом, и во многих случаях её использование может оказаться более приспособленным к возможностям и желаниям экспериментатора. С математической точки зрения возможность, как и вероятность, является мерой множества элементарных исходов, её аппарат во многом схож с теоретико-вероятностным и служит тем же целям. Поэтому имеет смысл представить возможность именно как некую альтернативу вероятности, несмотря на то что построение возможности, вообще говоря, никак не опирается и не использует вероятность.

4.1. Возможность как мера множества. Пусть Ω – некоторое множество элементарных исходов и $\mathcal{F} = 2^\Omega$ – система всех его подмножеств. Всюду далее для простоты будем рассматривать конечное множество элементарных исходов,

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}, \qquad 2 \leqslant n < \infty.$$

Пусть на сигма-алгебре $\mathcal{F} = 2^\Omega$ задана вероятность, причём без ограничения общности можно считать, что элементарные исходы упорядочены по убыванию их вероятности:

$$1 \geqslant P(\omega_1) \geqslant P(\omega_2) \geqslant \cdots \geqslant P(\omega_n) \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} P(\omega_k) = 1. \tag{4.1}$$

Введём на сигма-алгебре $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ещё одну меру помимо вероятности – поставим в соответствие каждому подмножеству $A \subset \Omega$ число $\mathrm{Ps}(A)$ и потребуем для $\mathrm{Ps}(\,\cdot\,)$, как и для вероятности, чтобы

• $0 \leqslant \mathrm{Ps}(A) \leqslant 1$ для любого A и $\mathrm{Ps}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} 1$; потребуем также на уровне аксиом, чтобы $\mathrm{Ps}(\varnothing) \overset{\text{def}}{=} 0$ (заметьте, здесь возможность отличается от вероятности, в которой $P(\varnothing) = 0$ по аксиоме аддитивности).

Вспомним о нашей идее отказаться от конкретных значений возможности, кроме нуля и единицы, и обращать внимание только на отношения «больше-меньше». В соответствии с этим будем говорить, что

• возможность $\mathrm{Ps}(\cdot)$ *эквивалентна* возможности $\widetilde{\mathrm{Ps}}(\cdot)$, если для любых двух событий A и B

$$\mathrm{Ps}(A) > \mathrm{Ps}(B) \iff \widetilde{\mathrm{Ps}}(A) > \widetilde{\mathrm{Ps}}(B), \qquad \mathrm{Ps}(A) = \mathrm{Ps}(B) \iff \widetilde{\mathrm{Ps}}(A) = \widetilde{\mathrm{Ps}}(B).$$

Таким образом, задать распределение возможностей на сигма-алгебре событий $\mathcal{F}$ означает определить не одну $\mathrm{Ps}(\cdot)\colon \mathcal{F} \mapsto [0,1]$, а класс эквивалентных в указанном смысле возможностей.

Условие эквивалентности возможностей $\mathrm{Ps}(\cdot)$ и $\widetilde{\mathrm{Ps}}(\cdot)$ при выполнении (4.1) можно записать как

$$\begin{gathered} 1 \geqslant \mathrm{Ps}(\omega_1) \geqslant \mathrm{Ps}(\omega_2) \geqslant \dots \geqslant \mathrm{Ps}(\omega_n) \geqslant 0 \\ \Updownarrow \\ 1 \geqslant \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_1) \geqslant \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_2) \geqslant \dots \geqslant \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_n) \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

причём равносильность неравенств здесь очень жёсткая: там и только там, где в одной цепочке стоит строгое неравенство, такое же строгое неравенство стоит и во второй цепочке. Или, другими словами, в (4.2) равенство $\mathrm{Ps}(\omega_j) = \mathrm{Ps}(\omega_k)$ эквивалентно $\widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_j) = \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_k)$.

Наконец, наложим

• условие *согласования* возможностной и вероятностной мер в смысле упорядоченности их значений:

$$P(A) \geqslant P(B) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ps}(A) \geqslant \mathrm{Ps}(B). \tag{4.3}$$

Заметим, что $P(A) = P(B)$ тогда и только тогда, когда $P(A) \geqslant P(B)$ и $P(B) \geqslant P(A)$. Поэтому как следствие (4.4) имеем $\mathrm{Ps}(A) \geqslant \mathrm{Ps}(B)$ и $\mathrm{Ps}(B) \geqslant \mathrm{Ps}(A)$. Другими словами, из (4.4) вытекает, что

$$P(A) = P(B) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ps}(A) = \mathrm{Ps}(B). \tag{4.4}$$

Если выполнено условие (4.1) и возможность согласована с вероятностью, то выполнено аналогичное условие упорядоченности для возможностей элементарных исходов:

$$1 \geqslant \mathrm{Ps}(\omega_1) \geqslant \mathrm{Ps}(\omega_2) \geqslant \dots \geqslant \mathrm{Ps}(\omega_n) \geqslant 0. \tag{4.5}$$

причём если $P(\omega_i) = P(\omega_j)$, то $\mathrm{Ps}(\omega_i) = \mathrm{Ps}(\omega_i)$.

Замечание. Если смотреть на условие согласования неравенств (4.1) и (4.5) «со стороны возможности», то легко заметить, что одной и той же возможности $\mathrm{Ps}(\cdot)$ отвечает целый класс согласованных с ней вероятностей, удовлетворяющих (4.1). Вспомнив, что сама возможность по сути есть тоже класс эквивалентных возможностей, мы можем сделать вывод, что условие согласования – это согласование двух классов мер. Но необходимо иметь в виду, что вероятности, отвечающие одной и той же возможности, вовсе не эквивалентны между собой. Если мы попытаемся решать задачи, выбирая то одну, то другую вероятность, мы будем получать разные ответы. В то же время все возможности, удовлетворяющие (4.5), эквивалентны: любые выводы, полученные с помощью какого-то одного представителя из класса возможностей, в точности совпадают с выводами в рамках эквивалентной возможностной модели.

4.2. Операции суммы и произведения возможностей. Для работы с возможностями различных событий нам необходимо ввести операции суммы ($\oplus$) и произведения ($\otimes$) возможностей. Мы выбрали для этих операций собственные символы, потому что эти операции не совпадают с привычными (арифметическими) суммой и произведением чисел.

Необходимость ввести новые операции связана всё с тем же отказом от конкретных значений в пользу строгого сохранения отношения порядка. Поскольку упорядоченность двух чисел сохраняется при строго монотонных преобразованиях, мы обязаны потребовать, чтобы операции $\oplus$ и $\otimes$ были инвариантны относительно таких преобразований: если $\gamma(\,\cdot\,)\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ есть строго монотонная функция, $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = 1$, то для любых двух чисел $x, y \in [0,1]$ равенство $x \oplus y = z$ имеет место тогда и только тогда, когда $\gamma(x) \oplus \gamma(y) = \gamma(z)$ и аналогично для произведения, или, в другой форме записи,

$$\gamma(x) \oplus \gamma(y) = \gamma(x \oplus y), \qquad \gamma(x) \otimes \gamma(y) = \gamma(x \otimes y) \tag{4.6}$$

для всех $x, y \in [0,1]$ и любой строго монотонной функции $\gamma(\,\cdot\,)$, сохраняющей значения 0 и 1. Потребуем также выполнения следующих равенств для любых $x, y \in [0,1]$:

$$\begin{gathered} x \oplus y = y \oplus x, \qquad x \otimes y = y \otimes x, \\ 0 \oplus x = x, \qquad 0 \otimes x = 0, \qquad 1 \oplus x = 1, \qquad 1 \otimes x = x \end{gathered} \tag{4.7}$$

(отметим, что только $1 \oplus x = 1$ отличает введённые нами операции от арифметических суммы и произведения).

Нетрудно видеть, что наложенные требования (4.6) и (4.7) выполнены, если положить для $x, y \in [0,1]$

$$x \oplus y \overset{\text{def}}{=} \max(x,y), \qquad x \otimes y \overset{\text{def}}{=} \min(x,y). \tag{4.8}$$

Можно показать, что при некоторых дополнительных условиях на операции верно и обратное: условия (4.6) и (4.7) влекут (4.8).

Определим по аналогии с $P(A) = \sum\limits_{\omega_k \in A} P(\omega_k)$ возможность любого $A \subset \Omega$ как

$$\mathrm{Ps}(A) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\omega_k \in A} \mathrm{Ps}(\omega_k) = \max_{\omega_k \in A} \mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(\omega_{k_*(A)}), \qquad k_*(A) = \min_{\omega_k \in A} k.$$

Заметим, что если возможности $\mathrm{Ps}(\,\cdot\,)$ и $\widetilde{\mathrm{Ps}}(\,\cdot\,)$ эквивалентны в смысле жёсткого условия согласования упорядоченности (4.2), то в наших обозначениях равенство

$$\mathrm{Ps}(\omega_{k_*(A)}) = \mathrm{Ps}(A) = \mathrm{Ps}(B) = \mathrm{Ps}(\omega_{k_*(B)})$$

вследствие равносильности $\mathrm{Ps}(\omega_{k_*(A)}) = \mathrm{Ps}(\omega_{k_*(B)})$ и $\widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_{k_*(A)}) = \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_{k_*(B)})$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{\mathrm{Ps}}(A) = \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_{k_*(A)}) = \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_{k_*(B)}) = \widetilde{\mathrm{Ps}}(B).$$

Аналогично

$$\mathrm{Ps}(\omega_{k_*(A)}) = \mathrm{Ps}(A) < \mathrm{Ps}(B) = \mathrm{Ps}(\omega_{k_*(B)})$$

вследствие равносильности $\mathrm{Ps}(\omega_{k_*(A)}) < \mathrm{Ps}(\omega_{k_*(B)})$ и $\widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_{k_*(A)}) < \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_{k_*(B)})$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{\mathrm{Ps}}(A) = \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_{k_*(A)}) < \widetilde{\mathrm{Ps}}(\omega_{k_*(B)}) = \widetilde{\mathrm{Ps}}(B).$$

Таким образом, условие (4.2) согласования упорядоченности элементарных исходов для эквивалентных возможностей влечёт аналогичное условие для произвольных событий.

Отметим также следующие следствия из нашего определения. В силу условия упорядоченности (4.5) мы имеем $\mathrm{Ps}(\Omega) = \mathrm{Ps}(\omega_1)$, но по определению $\mathrm{Ps}(\Omega) = 1$, поэтому в (4.5) следует положить $\mathrm{Ps}(\omega_1) = 1$. Кроме того, если $A \subset B$, то множество тех элементарных исходов, которые влекут A, содержится в множестве элементарных исходов, влекущих B, поэтому

$$\mathrm{Ps}(A) = \max_{\omega_k \in A} \mathrm{Ps}(\omega_k) = \max_{\omega_j \in B} \mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(B),$$

и мы имеем монотонность возможности: $\mathrm{Ps}(A) \leqslant \mathrm{Ps}(B)$, если $A \subset B$. Далее,

$$\mathrm{Ps}(A \cup B) = \max_{\omega_k \in A \cup B} \mathrm{Ps}(\omega_k) \leqslant \max\bigl(\max_{\omega_i \in A} \mathrm{Ps}(\omega_i),\ \max_{\omega_j \in B} \mathrm{Ps}(\omega_j)\bigr) = \mathrm{Ps}(A) \oplus \mathrm{Ps}(B),$$

другими словами, возможность аддитивна, $\mathrm{Ps}(A \cup B) = \mathrm{Ps}(A) \oplus \mathrm{Ps}(B)$, причём это верно для любых (не обязательно непересекающихся) подмножеств A и B. Для пересечения получаем

$$\mathrm{Ps}(A \cap B) = \max_{\omega_k \in A \cap B} \mathrm{Ps}(\omega_k) \leqslant \max_{\omega_k \in A} \mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(A),$$
$$\mathrm{Ps}(A \cap B) = \max_{\omega_k \in A \cap B} \mathrm{Ps}(\omega_k) \leqslant \max_{\omega_k \in B} \mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(B),$$

следовательно,

$$\mathrm{Ps}(A \cap B) \leqslant \min\bigl(\mathrm{Ps}(A), \mathrm{Ps}(B)\bigr) = \mathrm{Ps}(A) \otimes \mathrm{Ps}(B)$$

для любых подмножеств A и B.

4.3. Необходимость. До сих пор мы ничего не говорили о возможности дополнения к множеству. Здесь мы сталкиваемся со следующей проблемой:

$$1 = \mathrm{Ps}(\Omega) = \mathrm{Ps}(A \cup \bar{A}) = \mathrm{Ps}(A) \oplus \mathrm{Ps}(\bar{A}) = \max\bigl(\mathrm{Ps}(A), \mathrm{Ps}(\bar{A})\bigr),$$

откуда следует, что если $\mathrm{Ps}(A) \neq 1$, то $\mathrm{Ps}(\bar{A}) = 1$, а если $\mathrm{Ps}(A) = 1$, то $\mathrm{Ps}(\bar{A})$ может принимать любые значения. Получается, что $\mathrm{Ps}(\bar{A})$ нельзя однозначно связать с $\mathrm{Ps}(A) = 1$. Это приводит к тому, что нам требуется ввести ещё одну меру, характеризующую возможность того, что событие A не произойдёт. Назовём эту меру *необходимость* и будем обозначать как $\mathrm{Ns}(\,\cdot\,)$. В сущности необходимость события A есть невозможность того, что A не произойдёт.

Попробуем формализовать последнее определение. Поскольку абсолютные значения возможности не играют никакой роли в теории, мы не будем определять невозможность путём каких-либо арифметических действий с возможностью. Пусть $\bar{\gamma}\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ – произвольная **строго монотонно убывающая** функция такая, что $\bar{\gamma}(0) = 1$, $\bar{\gamma}(1) = 0$. Тогда $\bar{\gamma}(\mathrm{Ps}(A))$ естественно назвать невозможностью события A. В результате получаем определение *необходимости события* A:

$$\mathrm{Ns}(A) = \bar{\gamma}(\mathrm{Ps}(\bar{A})). \tag{4.9}$$

В этом определении конкретный вид функции $\bar{\gamma}$ не является существенным в силу условия эквивалентности необходимости, полностью аналогичной эквивалентности возможности.

Введём обозначение $\bar{\omega}_k = \Omega \setminus \{\omega_k\}$ для дополнения к одноэлементному множеству и зададим элементарные необходимости $\mathrm{Ns}(\bar{\omega}_k)$ таких дополнений для $k = 1, \ldots, n$. Преобразуем (4.9) с учётом убывания функции $\bar{\gamma}$:

$$\mathrm{Ns}(A) = \bar{\gamma}(\max_{\omega_k \notin A} \mathrm{Ps}(\omega_k) = \min_{\omega_k \notin A} \bar{\gamma}(\mathrm{Ps}(\omega_k)) = \min_{\omega_k \notin A} \mathrm{Ns}(\bar{\omega}_k).$$

Положим по определению $\mathrm{Ns}(\Omega) = 1$ и $\mathrm{Ns}(\varnothing) = 0$, тогда

$$\mathrm{Ns}(\bar{\omega}_1) = \min_{\omega_k \in \Omega} \mathrm{Ns}(\bar{\omega}_k) = \mathrm{Ns}(\varnothing) = 0.$$

4.4. Максимальное согласование вероятности и возможности. Напомним, что для согласованных вероятности и возможности неравенства

$$1 \geqslant P(\omega_1) \geqslant P(\omega_2) \geqslant \cdots \geqslant P(\omega_n) \geqslant 0, \tag{4.10}$$

влекут неравенства

$$1 = \mathrm{Ps}(\omega_1) \geqslant \mathrm{Ps}(\omega_2) \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{Ps}(\omega_n) \geqslant 0 \tag{4.11}$$

(равенство $\mathrm{Ps}(\omega_1) = 1$ есть следствие из аксиоматических свойств возможности), причём из $P(\omega_k) = P(\omega_{k+1})$ следует, что $\mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(\omega_{k+1})$.

Теперь поставим вопрос, можем ли мы так согласовать вероятность и возможность, чтобы были выполнены более сильные, чем следствие (4.10) $\Rightarrow$ (4.11), условия

$$P(A) > P(B) \iff \mathrm{Ps}(A) > \mathrm{Ps}(B), \qquad P(A) = P(B) \iff \mathrm{Ps}(A) = \mathrm{Ps}(B). \tag{4.12}$$

Другими словами, можно ли так согласовать вероятность и возможность, чтобы строгие неравенства в цепочке (4.10) отвечали в цепочке (4.11) строгим неравенствам и только им? Ответ на поставленный нами вопрос в общем случае отрицательный: из $\mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(\omega_{k+1})$, вообще говоря, не следует, что $P(\omega_k) = P(\omega_{k+1})$ (обратное следствие, как мы отмечали, справедливо).

Далее мы сформулируем точные условия, при которых допустима эквивалентность

$$\begin{aligned} P(\omega_k) > P(B) &\iff \mathrm{Ps}(\omega_k) > \mathrm{Ps}(\omega_k), \\ P(\omega_k) = P(B) &\iff \mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(\omega_k), \end{aligned} \tag{4.13}$$

и условия, при которых такая эквивалентность недостижима. Назовём возможность и вероятность *максимально согласованными*, если в (4.10) и (4.11) согласовано максимально допустимое число строгих неравенств (и, следовательно, равенств).

Разобьём множество всех подмножеств множества $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ на непересекающиеся классы

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{A \subset \Omega\colon\ \omega_1 \in A\},\\
\mathcal{A}_2 &= \{A \subset \Omega\colon\ \omega_2 \in A,\, \omega_1 \notin A\},\\
&\ \ \vdots\\
\mathcal{A}_k &= \{A \subset \Omega\colon\ \omega_k \in A,\, \omega_1, \dots, \omega_{k-1} \notin A\},\\
&\ \ \vdots\\
\mathcal{A}_n &= \{A \subset \Omega\colon\ \omega_n \in A,\, \omega_1, \dots, \omega_{n-1} \notin A\},\\
\mathcal{A}_{n+1} &= \{A \subset \Omega\colon\ \omega_1, \dots, \omega_n \notin A\} = \varnothing.
\end{aligned}$$

(нетрудно видеть, что класс $\mathcal{A}_n$, как и $\mathcal{A}_{n+1}$, содержит только одно подмножество: $\{\omega_n\}$ и $\varnothing$ соответственно). Поскольку

$$\mathrm{Ps}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\omega_k \in A} \mathrm{Ps}(\omega_k) = \max_{\omega_k \in A} \mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(\omega_{k_*(A)}), \qquad k_*(A) = \min_{\omega_k \in A} k,$$

класс $\mathcal{A}_k$ – это множество всех тех подмножеств $A_k \subset \Omega$, возможность которых одинакова: $\mathrm{Ps}(A_k) = \mathrm{Ps}(\omega_k)$ (здесь $k = 1, \dots, n$).

Теперь посмотрим на вероятности событий из класса $\mathcal{A}_k$. Поскольку вероятность события тем больше, чем больше элементарных исходов его влечёт, получаем тривиальную оценку для любого $A_k \in \mathcal{A}_k$:

$$P(\omega_k) \leqslant P(A_k) \leqslant P(\{\omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n\}), \qquad k = 1, \dots, n, \tag{4.14}$$

(при $k = 1$ имеем $P(\omega_1) \leqslant P(A_1) \leqslant P(\Omega) = 1$). В результате для всех событий $A_k \in \mathcal{A}_k$ мы можем заключить значения их вероятностей в определённый интервал на отрезке $[0, 1]$:

$$P(A_k) \in \Delta_k, \qquad \Delta_k = \left[P(\omega_k), \sum_{j=k}^{n} P(\omega_j)\right], \qquad k = 1, \dots, n$$

(для $k = 1$ сумма в определении интервала Δ_1 равна единице, а для $k = n$ интервал Δ_n вырождается в точку $P(\omega_n)$). При этом для каждого $k = 1, \dots, n$ обязательно найдутся множества $A_k \in \mathcal{A}_k$, вероятности которых лежат и налевой, и на правой границах интервала Δ_k.

Рассмотрим два соседних интервала. Заметим, что в силу (4.10) и неотрицательности вероятности

$$P(\omega_k) \geqslant P(\omega_{k+1}), \qquad \sum_{j=k}^{n} P(\omega_j) \geqslant \sum_{j=k+1}^{n} P(\omega_j),$$

поэтому интервалы в определённом смысле упорядочены, с увеличением своего номера интервал сдвигается на (быть может, равное нулю) расстояние влево по числовой прямой, причём этот сдвиг присущ и левому, и правому концу интервала по отдельности. Тем не менее возможны два случая: $\Delta_k \cap \Delta_{k+1} \neq \varnothing$ и $\Delta_k \cap \Delta_{k+1} = \varnothing$.

Пусть $\Delta_k \cap \Delta_{k+1} \neq \varnothing$, тогда правый конец интервала Δ_{k+1} «заходит» за левый конец интервала Δ_k:

$$\sum_{j=k+1}^{n} P(\omega_j) \geqslant P(\omega_k). \tag{4.15}$$

Поэтому при выполнении (4.15) существуют множества $A_{k+1} \in \mathcal{A}_{k+1}$ и $A_k \in \mathcal{A}_k$ такие, что $P(A_{k+1}) \geqslant P(A_k)$. По условию согласования возможности и вероятности тогда мы должны потребовать $\mathrm{Ps}(A_{k+1}) \geqslant \mathrm{Ps}(A_k)$. Но мы имеем условия (4.11), в результате получаем набор неравенств

$$\begin{gathered} P(A_{k+1}) \geqslant P(A_k), \qquad \mathrm{Ps}(A_{k+1}) \geqslant \mathrm{Ps}(A_k), \\ \mathrm{Ps}(A_{k+1}) = \mathrm{Ps}(\omega_{k+1}) \leqslant \mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(A_k), \end{gathered}$$

выполнить которые можно, только если $\mathrm{Ps}(A_{k+1}) = \mathrm{Ps}(\omega_{k+1}) = \mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(A_k)$. Поскольку, вообще говоря, $P(A_{k+1}) \neq P(A_k)$, мы получаем, что если имеет место неравенство (4.15), то согласовать возможность и вероятность в смысле условия (4.12) невозможно: существуют события с неравными вероятностями, но с обязательно равными возможностями.

Напротив, если

$$\sum_{j=k+1}^{n} P(\omega_j) < P(\omega_k), \tag{4.16}$$

то для любых $A_{k+1} \in \mathcal{A}_{k+1}$ и $A_k \in \mathcal{A}_k$ мы имеем $P(A_{k+1}) < P(A_k)$ (и, в частности, $P(\omega_{k+1}) < P(\omega_k)$). В этом случае мы можем положить $\mathrm{Ps}(\omega_{k+1}) < \mathrm{Ps}(\omega_k)$. Неравенство (4.16) может быть также записано в любой из двух эквивалентных форм

$$1 - \sum_{j=1}^{k} P(\omega_j) < P(\omega_k), \qquad 2P(\omega_k) + P(\omega_{k-1}) + \cdots + P(\omega_1) > 1 \tag{4.17}$$

(для $k = 1$ мы имеем $1 - P(\omega_1) < P(\omega_1)$, что эквивалентно $P(\omega_1) > 1/2$).

Подведём итог. Если для всех $k = 1, \ldots, n$ выполнено условие (4.16) и, следовательно, $P(\omega_{k+1}) < P(\omega_k)$, то неравенства

$$1 \geqslant P(\omega_1) > P(\omega_2) > \cdots > P(\omega_n) \geqslant 0,$$

влекут неравенства

$$1 = \mathrm{Ps}(\omega_1) > \mathrm{Ps}(\omega_2) > \cdots > \mathrm{Ps}(\omega_n) \geqslant 0$$

и для любых событий A и B

$$P(A) > P(B) \iff \mathrm{Ps}(A) > \mathrm{Ps}(B), \qquad P(A) = P(B) \iff \mathrm{Ps}(A) = \mathrm{Ps}(B).$$

Если найдётся номер k такой, что имеет место неравенство (4.15), то для этого k обязательно $\mathrm{Ps}(\omega_{k+1}) = \mathrm{Ps}(\omega_k)$, а при попытке полного (для всех событий) согласования возможности и вероятности мы можем добиться только выполнения условий

$$P(A) \geqslant P(B) \implies \mathrm{Ps}(A) \geqslant \mathrm{Ps}(B), \qquad P(A) = P(B) \implies \mathrm{Ps}(A) = \mathrm{Ps}(B),$$

но, вообще говоря, существуют события с неравными вероятностями, но равными возможностями.

В заключение для примера рассмотрим, к чему приводят условия (4.16), если количество элементарных исходов равно $n = 2, 3$. Положим $p_k = P(\omega_k) > 0$ для $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$1 > p_1 > p_2 > \dots > p_n > 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Для $n = 2$ условия (4.16) приводят к неравенствам $0 < p_2 < p_1 < 1$, или, что эквивалентно, $1/2 < p_1 < 1$ и $0 < p_2 < 1/2$. При выполнении этих неравенств согласованные с вероятностями возможности элементарных исходов подчиняются неравенствам $1 = \mathrm{Ps}(\omega_1) > \mathrm{Ps}(\omega_2) > 0$.

Для $n = 3$ имеем $p_1 > p_2 + p_3 = 1 - p_1$, откуда $p_1 > 1/2$, и $p_2 > p_3$. При этом $p_2 + p_3 = 1 - p_1 < 1/2$. Если эти неравенства выполнены, то при согласовании возможности и вероятности $1 = \mathrm{Ps}(\omega_1) > \mathrm{Ps}(\omega_2) > \mathrm{Ps}(\omega_3) > 0$.

Видно, что возможность имеет весьма низкую «разрешающую способность»: если элементарные исходы ω_k и ω_{k+1} имеют близкие по значению вероятности (например, в случае $n = 3$ мы имеем $p_k \approx 1/3$ с сохранением, конечно, условия нормировки $p_1 + p_2 + p_3 = 1$), то $\mathrm{Ps}(\omega_k) = \mathrm{Ps}(\omega_{k+1})$.

Пример 1. Положим $p_k = P(\omega_k) > 0$ для $k = 1, \dots, n$. Пусть для некоторого числа $q > 0$

$$P(\{\omega_k\}) = p_k = \frac{q}{(1+q)^k}, \qquad k = 1, 2, \dots, n, \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{4.18}$$

Для любого $l = 1, 2, \dots, n$, как нетрудно проверить,

$$\frac{q}{(1+q)^l} = 1 - p_1 - \dots - p_l = p_{l+1} + \dots + p_n \leqslant p_l, \tag{4.19}$$

если и только если $q > 1$. В этом случае все интервалы $\Delta_1 = [p_1, 1], \dots, \Delta_j = [p_j, 1 - p_1 - \ldots - p_{j-1}]$, $j = 2, 3, \dots, n$, попарно не пересекаются, их суммарная длина $1/q < 1$, и в формуле (4.11) все неравенства являются строгими:

$$1 = \mathrm{Ps}(\omega_1) > \mathrm{Ps}(\omega_2) > \dots > \mathrm{Ps}(\omega_n) > 0.$$

В этом случае нашей теоретико-вероятностной модели соответствует «максимально детальная» теоретико-возможностная модель.

С другой стороны, если $q \leqslant 1$, то все интервалы Δ_j и Δ_{j+1}, $j = 1, 2, \dots, n-1$, пересекаются и в (4.11) все неравенства (кроме последнего в цепочке) превращаются в равенства:

$$1 = \mathrm{Ps}(\omega_1) = \mathrm{Ps}(\omega_2) = \dots = \mathrm{Ps}(\omega_n) > 0.$$

В этом случае теоретико-возможностная модель, согласованная с вероятностной, является «наименее детальной».

4.5. Условная возможность и независимость. Напомним, что

$$\mathrm{Ps}(A \cup b) = \max\{\mathrm{Ps}(A), \mathrm{Ps}(B)\}, \qquad \mathrm{Ps}(A \cap B) \leqslant \min\{\mathrm{Ps}(A), \mathrm{Ps}(B)\}.$$

Напомним также формулу $P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$, определяющую условную вероятность. Перенесём последнее равенство в теорию возможностей:

$$\mathrm{Ps}(A \cap B) = \mathrm{Ps}(B \mid A) \otimes \mathrm{Ps}(A) = \min\{\mathrm{Ps}(B \mid A), \mathrm{Ps}(A)\}. \tag{4.20}$$

Если рассматривать это равенство как уравнение для нахождения $\mathrm{Ps}(B \mid A)$, его решение очевидно:

если $\mathrm{Ps}(A \cap B) < \mathrm{Ps}(A)$, то $\mathrm{Ps}(B \mid A) = \mathrm{Ps}(A \cap B)$;

если же $\mathrm{Ps}(A \cap B) = \mathrm{Ps}(A)$, то $\mathrm{Ps}(B \mid A)$ может быть равна любому числу, не меньшему $\mathrm{Ps}(A \cap B)$.

События $A_1, \ldots, A_n$ называются Ps-независимыми (в совокупности), если для любого $k = 1, \ldots, n$ и для любого набора индексов $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathrm{Ps}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \min\{\mathrm{Ps}(A_{i_1}), \ldots \mathrm{Ps}(A_{i_k})\}.$$

4.6. Нечёткий элемент. Фундаментальным понятием теории вероятностей является случайная величина – это функция $\xi(\cdot)$, заданная на Ω и принимающая числовые значения (удовлетворяющая условию измеримости, которое в теории возможностей налагать не требуется).

Аналогом случайной величины в теории возможностей является *нечёткая величина* (*нечёткий элемент*), которая определяется как произвольная функция из множества Ω в $\mathbb{R}$. Функцию $g_\xi(x) = \mathrm{Ps}(\eta = x)$, определённую для всех $x \in \mathbb{R}$, назовём *распределением возможностей* нечёткого элемента ξ.

Двумерный нечёткий элемент (ξ, η) или более высокоразмерные нечёткие элементы задаются аналогично. Распределение возможностей нечёткого элемента (ξ, η) есть функция $g_{\xi,\eta}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ двух переменных, определенная как возможность равенств $\xi = x$, $\eta = y$:

$$g_{\xi,\eta}(x, y) = \mathrm{Ps}(\xi = x, \eta = y).$$

Маргинальное распределение координаты η тогда определяется соотношением

$$g_\eta(y) = \mathrm{Ps}\left(\bigcup_x \{\xi = x, \eta = y\}\right) = \sup_x \mathrm{Ps}(\xi = x, \eta = y) = \sup_x g_{\xi,\eta}(x, y).$$

В последнем выражении мы рассмотрели возможность бесконечного (несчётного) объединения событий и определили её, как и выше, как максимум возможностей. Но в данном случае вместо функции максимума мы использовали точную верхнюю грань.

Нечеткие элементы ξ и η называются Ps-независимыми, если

$$g_{\xi,\eta}(x, y) = \mathrm{Ps}(\xi = x, \eta = y) = \min\{g_\xi(x), g_\xi(y)\}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Можно определить и условное распределение, применяя формулы из предыдущего пункта:

$$g_{\eta|\xi}(y|x) \quad \begin{cases} = g_{\xi,\eta}(x, y), & g_\xi(x) > g_{\xi,\eta}(x, y), \\ \geqslant g_{\xi,\eta}(x, y), & g_\xi(x) = g_{\xi,\eta}(x, y), \end{cases}$$

где во второй строке значение $g_{\eta|\xi}(y|x)$ может быть любым числом, удовлетворяющим указанному неравенству.

Пример 2. Нечеткие элементы φ и ν независимы, их распределения задаются как

$$g_\varphi(x) = g_\nu(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1+x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 0 & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Пусть $\xi = \varphi + \nu$. Найдём распределение нечёткого элемента ξ.

Соотношение $\varphi + \nu = \xi$ позволяет записать совместное распределение возможностей трехмерного нечеткого вектора: если $x = z + y$, то

$$g_{\varphi,\nu,\xi}(z,y,x) = \mathrm{Ps}(\varphi = z, \nu = y) = \min\{g_\varphi(z), g_\nu(y)\} = \min\{g_\varphi(z), g_\nu(x-y)\};$$

если $x + y \neq z$, то $g_{\varphi,\nu,\xi}(z,y,x) = 0$, так как в этом случае равенство $\xi = \varphi + \nu$ не может быть выполнено. Распределение нечёткого элемента ξ получается путём «интегрирования»:

$$g_\xi(x) = \mathrm{Ps}\left(\bigcup_z (\varphi = z, \nu = x - z)\right) = \sup_z \min\{g_\varphi(z), g_\nu(x-y)\}.$$

Подставляя явный вид распределений нечётких элементов ϕ и ν, получаем

$$g_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1 + \dfrac{x}{2}, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 0, & x \notin [-2,2]. \end{cases}$$

Найдём условное распределение φ при $\xi = x$, которое получим как решение уравнения $g_{\varphi,\xi}(z,x) = \min\{g_{\varphi|\xi}(z|x), g_\xi(x)\}$. Это уравнение имеет решение

$$g_{\varphi|\xi}(z|x) \quad \begin{cases} = g_{\varphi,\xi}(z,x), & g_\xi(x) > g_{\varphi,\xi}(z,x), \\ \geqslant g_{\varphi,\xi}(z,x), & g_\xi(x) \leqslant g_{\varphi,\xi}(z,z). \end{cases}$$

При $\xi = 1$ максимум этого распределения будет в точке $z = 1/2$. Другими словами, если $\phi + \nu = 1$ и нечёткие элементы ϕ и ν независимы и одинаково распределены на отрезке $[0,1]$, то наиболее возможное значение $\phi = 1/2$.