

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕСНА 2017 г.

I. Программа курса

1. Алгебры и сигма-алгебры событий:

- событие как подмножество множества элементарных исходов, операции объединения, пересечения и дополнения, их свойства;
- определение и свойства алгебр и сигма-алгебр подмножеств множества Ω , примеры.

2. Понятие предела последовательности событий:

- определение верхнего и нижнего пределов последовательностей множеств, связь с пределами последовательностей индикаторных функций;
- существование предела монотонных (по включению) последовательностей множеств.

3. Аксиомы вероятности и следствия из них:

- простейшие следствия из аксиом, вероятность дополнения к событию, вероятность объединения событий;
- теоремы о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.

4. Условная вероятность:

- вероятностное пространство условной вероятности (аксиоматическое определение);
- свойства условной вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса.

5. Независимость событий:

- определение попарной и совокупной независимости;
- свойства независимых событий.

6. Биномиальная схема независимых испытаний:

- вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний (аксиоматическое определение);
- биномиальное распределение и отрицательное биномиальное распределение;
- теорема Пуассона, интегральная теорема Муавра–Лапласа и локальная теорема Муавра–Лапласа.

7. Случайные блуждания по прямой:

- математическая модель случайных блужданий как последовательности независимых испытаний;
- распределение координаты точки на n -м шаге;
- принцип отражения и вероятность достижения заданной точки без захода в начальную точку движения.

8. Цепи Маркова:

- цепь Маркова как последовательность случайных величин, совместное распределение первых n шагов;
- определение и свойства матриц перехода за один и n шагов;
- финальные вероятности перехода и финальные распределения, теорема Маркова (без доказательства);
- теорема о сходимости среднего времени пребывания в данном состоянии к финальной вероятности состояния, эргодичность.

9. Понятие случайной величины:

- определение случайной величины, функция распределения, плотность распределения;
- типы распределений (дискретное, абсолютно непрерывное);
- свойства функции распределения.

10. Понятие многомерной случайной величины, независимость случайных величин:
 - совместная функция распределения, совместная плотность распределения;
 - независимость случайных величин попарная и в совокупности, теорема о независимости функций от независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание:
 - определение случайной величины;
 - свойства математического ожидания сумм и произведений случайных величин;
 - неравенства Чебышёва и Коши–Буняковского.
12. Дисперсия и коэффициент ковариации:
 - определение дисперсии случайной величины и матрицы ковариаций случайного вектора;
 - свойства дисперсии и матрицы ковариаций.
13. Характеристические функции и их свойства.
 - определение и простейшие свойства (характеристическая функция суммы независимых случайных величин, связь производных характеристической функции с начальными моментами случайной величины, преобразование характеристической функции при линейном преобразовании случайной величины);
 - формулы, связывающие характеристическую функцию с функцией распределения и плотностью распределения (без доказательства), теорема о связи сходимости последовательности характеристических функций со сходимостью по распределению (без доказательства).
14. Условные распределения и условные плотности распределения:
 - определение условного распределения для дискретного и абсолютно непрерывного совместных распределений двух случайных величин;
 - формулы полной вероятности и формулы Байеса для условных плотностей.
15. Сходимости последовательностей случайных величин:
 - сходимости с вероятностью единица (почти наверное), по вероятности, по распределению;
 - лемма Бореля–Кантелли.
16. Законы больших чисел:
 - закон больших чисел в форме Чебышева, теорема Бернулли;
 - усиленный закон больших чисел, сходимость (почти наверное) частоты к вероятности.
17. Центральная предельная теорема и интегральная теорема Муавра–Лапласа.
18. Основы теории возможностей:
 - возможность как мера множества, сумма и произведение возможностей;
 - классы эквивалентных возможностей;
 - максимальное согласование возможности и вероятности в пространстве с конечным числом элементарных исходов;
 - понятие нечёткого элемента, распределение нечёткого элемента, пример расчёта распределения (сумма независимых элементов).

Список литературы

- [1] Ю. П. Пытьев, И. А. Шिशмарёв, «Теория вероятностей, Математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков», М.: МГУ, 2010.
- [2] Б. В. Гнеденко, «Курс теории вероятностей», М.: Едиториал УРСС, 2005.
- [3] А. Н. Ширяев, «Вероятность», М.: МЦНОМО, 2004.
- [4] Р. Феллер, «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», М.: Мир, 1984.
- [5] Материалы на сайте кафедры математического моделирования и информатики, <http://cmp.phys.msu.ru/ru/study/probability>.

II. ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ

Ниже приведены вопросы в том виде, в каком они будут сформулированы в билетах; в списке возможны повторы вопросов.

1. Понятие случайного события. Алгебры и сигма-алгебры событий. Примеры и свойства алгебр и сигма-алгебр.
2. Понятие предела последовательности событий. Сходимость монотонных последовательностей событий.
3. Аксиомы вероятности и простейшие следствия из них.
4. Теорема о непрерывности вероятности для монотонных и произвольных последовательностей событий.
5. Пространство условной вероятности. Формула полной вероятности и формула Байеса.
6. Независимость событий: попарная и в совокупности. Свойства независимых событий.
7. Вероятностное пространство биномиальной схемы независимых испытаний. Биномиальное распределение. Отрицательное биномиальное распределение.
8. Биномиальное распределение. Теорема Пуассона. Интегральная теорема Муавра–Лапласа и локальная теорема Муавра–Лапласа.
9. Случайные блуждания по прямой. Распределение координаты на n -м шаге, вероятность блужданий без захода в ноль.
10. Цепи Маркова. Свойства матриц перехода.
11. Финальные распределения в цепи Маркова. Теорема Маркова. Эргодичность цепи Маркова.
12. Определение случайной величины. Свойства функции распределения. Плотность распределения и ее свойства.
13. Независимость случайных величин: попарная и в совокупности. Функции от независимых случайных величин. Свойства моментов суммы и произведения независимых случайных величин.
14. Математическое ожидание случайной величины и случайного вектора. Свойства математического ожидания. Неравенство Чебышёва.
15. Дисперсия случайной величины и матрица ковариаций случайного вектора и их свойства. Неравенство Коши–Буняковского.
16. Условные распределения и условные плотности распределения. Формулы полной вероятности и формулы Байеса для условных плотностей.
17. Неравенство Чебышёва. Сходимость по вероятности последовательности случайных величин. Закон больших чисел в форме Чебышева. Теорема Бернулли.
18. Сходимость с вероятностью единица (почти наверное). Лемма Бореля–Кантелли.
19. Усиленный закон больших чисел.
20. Сходимость по распределению последовательности случайных величин. Характеристические функции и их свойства.
21. Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра–Лапласа.
22. Возможность как мера множества. Сумма и произведение возможностей. Классы эквивалентных возможностей.
23. Согласование мер возможности и вероятности, максимальное согласование.