Вопросы теоеретического минимума по курсу «Теория случайных процессов». Декабрь 2017

1. Дать определение двумерной функции распределения случайного процесса $\xi(t)$, $t > 0$.

2. Пусть $\xi(t)$, $t > 0$, есть некоторый случайный процесс. При каком условии он является однородным во времени?

3. Пусть $\xi(t)$, $t > 0$, есть некоторый случайный процесс. При каком условии он является процессом с независимыми приращениями?

4. Случайный процесс $\xi(t)$, $t > 0$, имеет двумерную плотность $p(x, y; t, s)$ и математическое ожидание $M\xi(t) = 0$ для любого $t > 0$. Как рассчитать ковариационную функцию $R(t, s)$ данного процесса (записать явную формулу для расчёта, а не определение)?

5. Случайный процесс $\xi(t)$, $t > 0$, задан как $\xi(t) = \nu + t$, где ν – случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[0, 1]$. Нарисовать две различные возможные траектории этого процесса на одном графике.

6. Случайный процесс $\xi(t)$, $t > 0$, задан как $\xi(t) = e^{\nu t}$, где ν – случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Найти вероятность того, что траектория этого случайного процесса не убывает при всех значениях $t > 0$.

7. Случайный процесс $\xi(t)$, $t > 0$, задан как $\xi(t) = e^{\nu t}$, где ν – случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Найти вероятность того, что траектория этого случайного процесса не убывает при всех значениях $t > 0$.

8. Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с интенсивностью λ. Его траектории представляют собой: кусочно-постоянные функции со случайными скачками; кусочно-постоянные функции с постоянными скачками; кусочно-линейные непрерывные функции со случайным наклоном. Отметьте верные утверждения.

9. Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с интенсивностью λ. Отметьте верные утверждения из следующего списка: любые два его сечения независимы; $M\xi(t)$ не зависит от t; приращения $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ и $\xi(s_2) - \xi(s_1)$ независимы для любых непересекающихся промежутков $[t_1, t_2)$ и $[s_1, s_2)$.

10. Записать формулу, задающее совместное распределение двух сечений процесса Пуассона $\xi(t)$ и $\xi(2t)$ (интенсивность процесса равна λ).

11. Пусть τ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – времена ожидания требований в пуассоновом потоке с интенсивностью λ. Отметьте верные утверждения из следующего списка: любые две случайные величины τ_k и τ_r независимы при $k \neq r$; любые два приращения $\tau_k - \tau_{k-1}$ и $\tau_r \tau_{r-1}$ независимы при $k \neq r$.

12. Пусть τ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – времена ожидания требований в пуассоновом потоке с интенсивностью λ. Записать формулу, задающую совместное распределение случайных величин τ_1 и τ_2.

13. Пусть τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – времена ожидания требований в пуассоновом потоке с интенсивностью λ. Записать формулу, задающую совместное распределение случайных величин $\tau_2 - \tau_1$ и $\tau_3 - \tau_2$.

14. Частица совершает симметричные случайные прыжки влево и вправо на расстояние Δx через промежутки времени Δt. Пусть $w(t)$ – её координата в момент времени t. При какой связи между $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ в непрерывном пределе таких случайных блужданий мы получаем, что $w(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Винера?

15. Дать определение процесса Винера $w(t)$, $t \geqslant 0$, с параметром σ^2, начинающегося в нуле.

16. Для процесса Винера $w(t)$, $t \geqslant 0$, записать его ковариационную функцию.

17. Пусть $w(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Винера с параметром σ^2, начинающийся в нуле. Записать двумерную плотность этого процесса.

18. Траектории процесса Винера с вероятностью единица при всех $t \geqslant 0$: разрывны, непрерывны, дифференцируемы; монотонно возрастают с вероятностью единица, испытывают единичные скачки в случайные моменты времени, симметричны относительно линии уровня $x = 0$, т. е. $P(w(t) > 0) = P(w(t) < 0)$. Отметьте верные утверждения.

19. Пусть $w(t)$, $t \geqslant 0$, при $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3$ есть процесс Винера. Сечения $w(t_k)$, $k = 1, 2, 3$, этого процесса независимы; сечения $w(t_k)$, $k = 1, 2, 3$, этого процесса имеют нормальное распределение; приращения $w(t_k) - w(t_k - 1)$, $k = 1, 2, 3$, этого процесса независимы; приращения $w(t_k) - w(t_k - 1)$, $k = 1, 2, 3$, имеют нормальное распределение. Отметьте верные утверждения.

20. Записать свойство случайного процесса $\xi(t)$, $t > 0$, определяющее его как марковский случайный процесс с состояниями $x_1, \ldots, x_s$ (здесь $2 \leqslant s < \infty$).

21. Задана матрица перехода $\pi(\,\cdot\,)$ для марковского случайного процесса с состояниями $x_1, \ldots, x_s$ и начальное распределение $P(\xi(0) = x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots s$ (здесь $2 \leqslant s < \infty$). Записать формулы, позволяющие рассчитать двумерное совместное распределение сечений $\xi(t)$ и $\xi(s)$ процесса при $0 < s < t$, выразив все вероятности через заданные параметры.

22. Записать уравнение Чепмена–Колмогорова, связывающее матрицы перехода $\pi(t)$, $t > 0$, для марковского случайного процесса с состояниями $x_1, \ldots, x_s$.

23. Записать систему уравнений Колмогорова для $(s \times s)$-матричнозначной функции $\pi(\,\cdot\,)$, элементы которой заданы как $\pi_{ij}(t) = P(\xi(t) = x_j | \xi(t) = x_i)$ (все параметры ответа выразить через $\pi(\,\cdot\,)$).

24. Марковский процесс имеет два возможных состояния и матрицу переходных вероятностей $\pi(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & 1 - e^{-\lambda t} \\ 1 - e^{-\mu t} & e^{-\mu t} \end{pmatrix}$. Записать для такого процесса систему уравнений Колмогорова для матричнозначной функции $\pi(\,\cdot\,)$, элементы которой заданы как $\pi_{ij}(t) = P(\xi(t) = x_j | \xi(t) = x_i)$, $i, j = 1, 2$.

25. Дать определение среднеквадратичной непрерывности в точке t для комплекснозначного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и сформулировать теорему о связи этого свойства со свойствами ковариационной функции этого процесса.

26. Дать определение среднеквадратичной дифференцируемости в точке t для комплекснозначного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и сформулировать теорему о связи этого свойства со свойствами ковариационной функции этого процесса.

27. Дать определение среднеквадратичной интегрируемости на отрезке $[a, b]$ для для комплекснозначного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и сформулировать теорему о связи этого свойства со свойствами ковариационной функции этого процесса.

28. Пусть интеграл по стохастической мере и скалярное произведение для функций $g(\,\cdot\,), h(\,\cdot\,)$ определены соответственно как

$$\mathcal{I} = \int_a^b g(x)\, Z(dx), \qquad (g, h) = \int_a^b g(x)h(x)\, dF(x).$$

Записать равенство, которое связывает значение структурной функцию меры $m(\Delta x) = M|Z(\Delta x)|^2$ и весовую функцию $F(\,\cdot\,)$ (для интервала $\Delta x \subset [a, b)$).

29. Пусть $Z(\Delta x)$ – ортогональная стохастическая мера и $m(\Delta x) = M|Z(\Delta x)|^2$ – её структурная функция на множестве интервалов $\Delta x \subset [a, b)$. Подчеркните верные утверждения: $P(Z(\Delta x) \geqslant 0) = 1$ для любого $\Delta x \subset [a, b)$; $m(\Delta x) \geqslant 0$ для любого $\Delta x \subset [a, b)$; $Z(\,\cdot\,)$ аддитивна в среднем квадратичном; $m(\,\cdot\,)$ аддитивна; $Z(\,\cdot\,)$ счётно-аддитивна в среднем квадратичном;

30. Спектральная мера интервала $[t_1, t_2)$ задана как $Z[t_1, t_2) = w(t_2) - w(t_1)$, где $w(t)$, $t \geqslant 0$, – стандартный процесс Винера с нулевым средним и параметром σ^2. Записать явное выражение для случайной величины $\mathcal{I}$, заданной как интеграл

$$\mathcal{I} = \int_0^{2a} g(t)\, Z(dt), \quad \text{где} \quad g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ -1, & a < t \leqslant 2a. \end{cases}$$