«Теория случайных процессов». Осень 2016 г.

Основные понятия.

1. Определение случайного процесса, сечения и траектории процесса.
2. Определение n-мерных функций и плотностей распределения случайного процесса.
3. Математическое ожидание, дисперсия и ковариационная функция случайного процесса (их выражение через интеграл, содержащий плотность или функцию распределения).
4. Процесс с независимыми приращениями, процесс однородный во времени.
5. Процесс Пуассона с интенсивностью λ, начинающийся в нуле.
6. Процесс Винера.
7. Марковский процесс с непрерывным временем с конечным числом состояний. Матрица перехода за время t.
8. Среднеквадратичные непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайного процесса.
9. Случайный процесс, стационарный в широком смысле.
10. Ортогональная стохастическая мера.

Простейшие понятия и утверждения

1. Показать, что для ковариационной функции однородного процесса с независимыми приращениями справедливо равенство $R(t,s) = D(\min(t,s))$.
2. Процесс Пуассона с интенсивностью λ, начинающийся в нуле: свойства траекторий, математическое ожидание и ковариационная функция, n-мерное распределение сечений. Марковское свойство.
3. Процесс Винера с нулевым средним, начинающийся в нуле: свойства траекторий, математическое ожидание и ковариационная функция, n-мерная плотность распределения сечений. Марковское свойство.
4. Среднеквадратичная непрерывность траекторий процесса Винера и их непрерывность в смысле сходимости по вероятности.
5. Процесс Винера как предел дискретных симметричных случайных блужданий по прямой.
6. Марковский процесс с непрерывным временем с конечным числом состояний: простейшие свойства матрицы перехода за время $t > 0$ (стохастичность, уравнение Чепмена–Колмогорова), непрерывность и невырожденность матричнозначной функции $\pi(t)$ при каждом $t > 0$ как следствия её непрерывности при $t = 0$.
7. Среднеквадратичная (конечная) аддитивность ортогональной стохастической меры и счётная аддитивность структурной функции меры.

Более сложные теоремы

1. Доказать независимость промежутков времени между поступлениями требований и и вывести совместное распределение абсолютных времён поступления требований.

2. Доказать, что пуассонов поток требований (однородный поток требований с независимыми приращениями и малой интенсивностью требований) есть процесс Пуассона.

3. Доказать непрерывность траекторий процесса Винера в каждой точке с вероятностью единица.

4. Доказать дифференцируемость матрицы матричнозначной функции $\pi(t)$ в точке $t = 0$ и при всех $t > 0$ и вывести уравнения Колмогорова для матрицы перехода и вероятностей состояний.

5. Доказать теорему о связи среднеквадратичной непрерывности случайного процесса с непрерывностью его ковариационной функции.

6. Доказать теорему о связи среднеквадратичной дифференцируемости случайного процесса с дифференцируемостью его ковариационной функции.

7. Доказать теорему о связи среднеквадратичной интегрируемости случайного процесса с интегрируемостью его ковариационной функции.

8. Изложить процедуру построения ортогональной стохастической меры и интеграла по этой мере на отрезке $[a, b)$. Для любой интегрируемой функции доказать равенство

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dF(x) = M \left| \int_a^b f(x) | \, Z(dx) \right|^2 .$$