# О кафедре математического моделирования и информатики

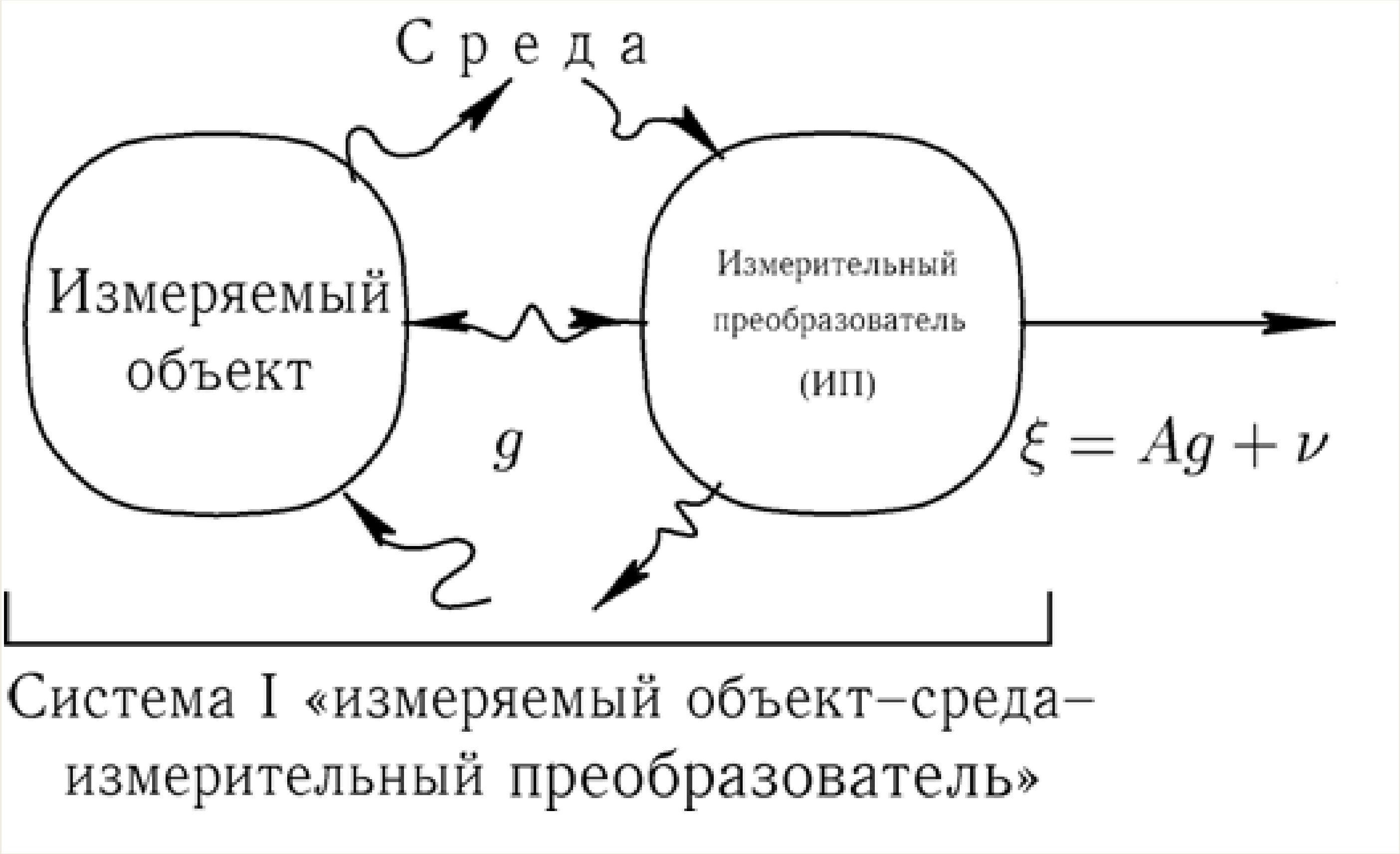
# *Методы теории измерительно-вычислительных преобразователей*

Теория ИВП отвечает на вопрос:

как добиться наилучших результатов экспериментальных исследований, в которых для анализа и интерпретации экспериментальных данных используется компьютер?

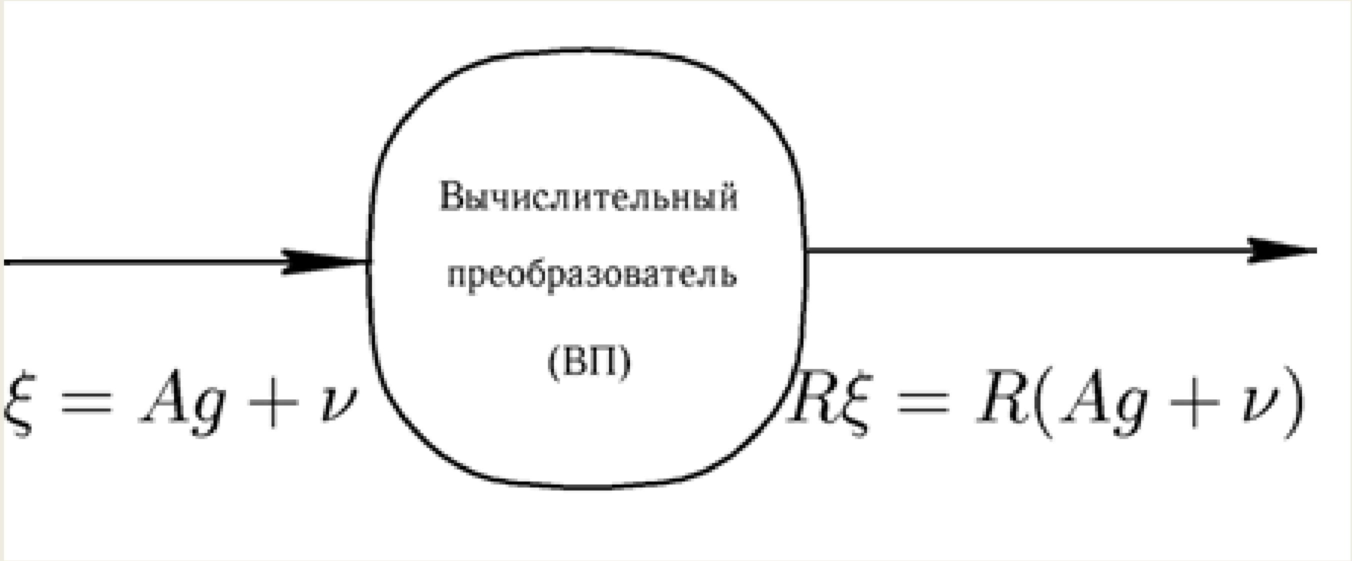
Теория ИВП разработана на физическом факультете МГУ в работах проф. Ю.П.Пытьева и его учеников.

# Измерительная часть ИВП



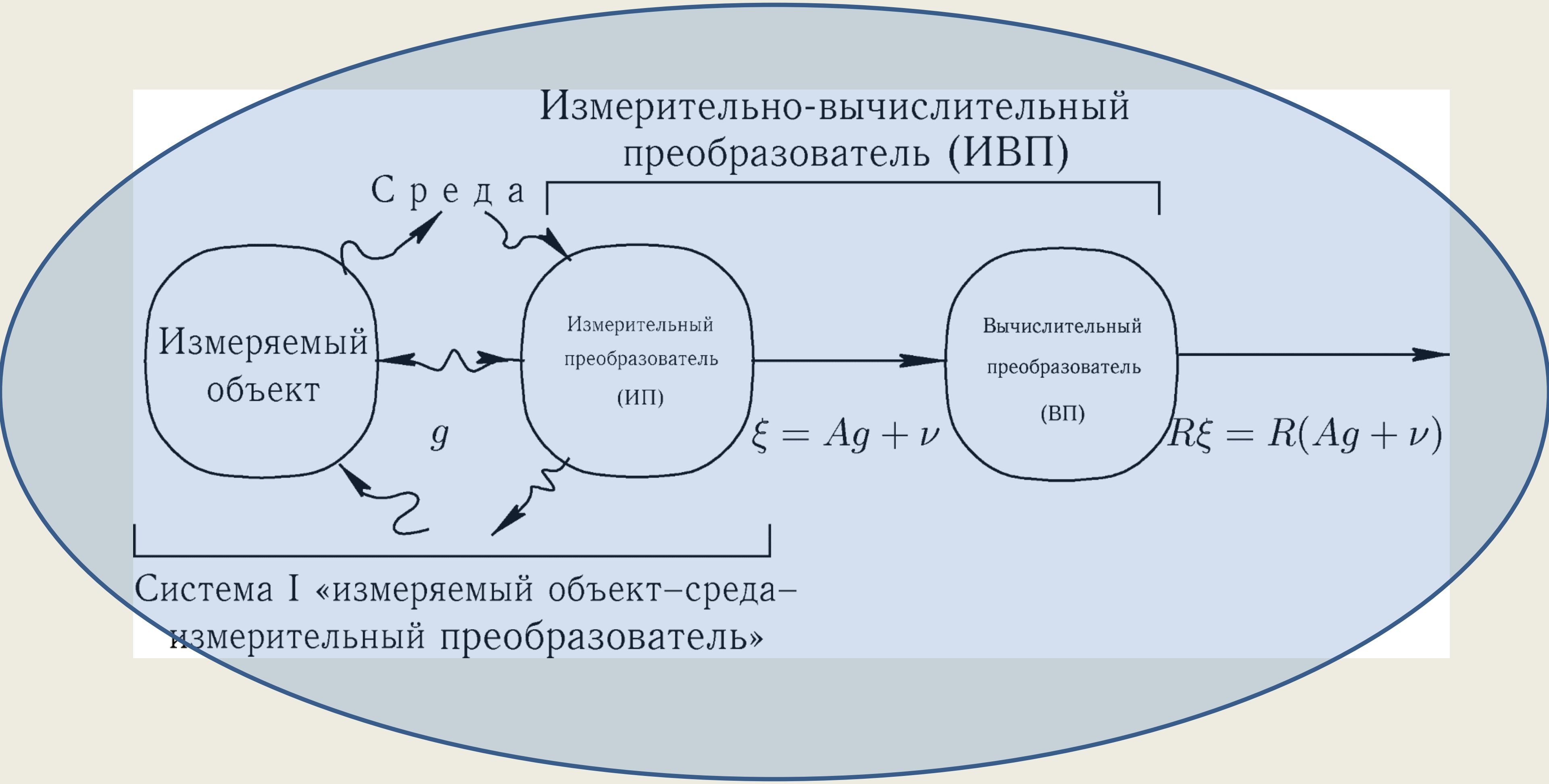

Измерительная часть ИВП преобразует воздействие на прибор в электрический сигнал.

# Вычислительная часть ИВП

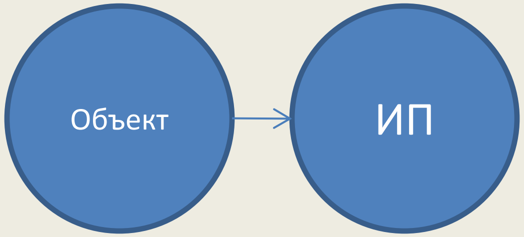



В вычислительной компоненте электрический сигнал оцифровывается и подвергается математическому преобразованию, которое призвано извлечь из результатов измерения все то, что интересует исследователя

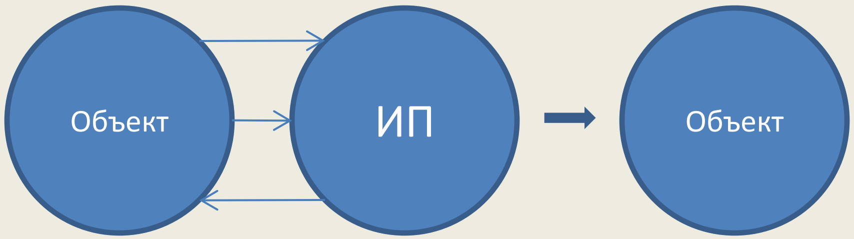
# ИВС рассматривается как новый единый измерительный прибор



# Принципы теории ИВП

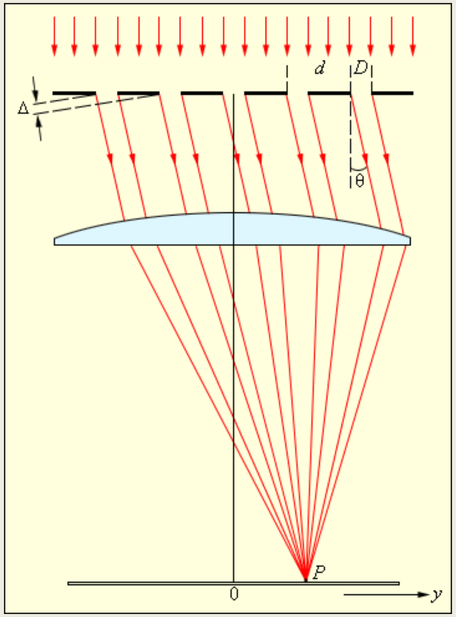


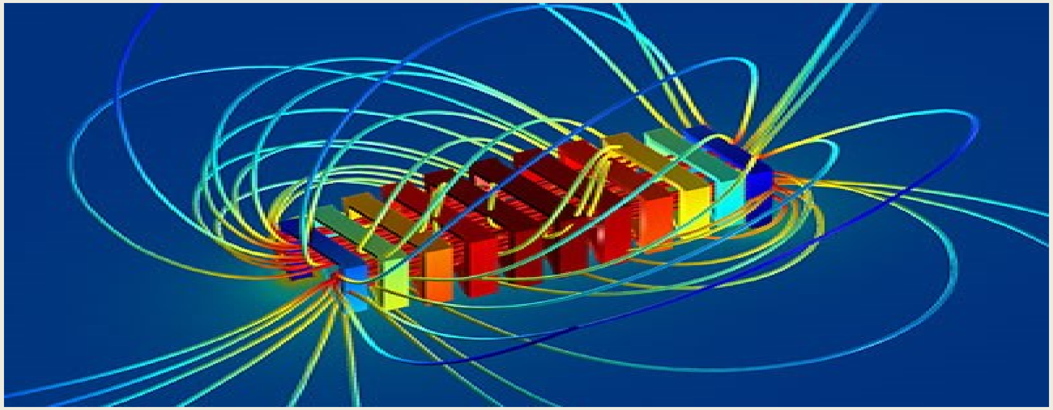

Измерения слабо возмущают объект



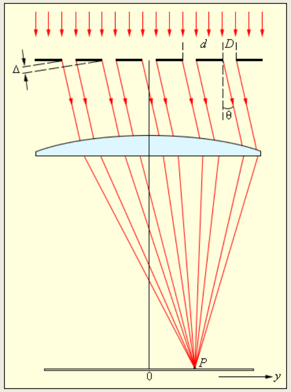

Измерения сильно возмущают объект и компенсируются в компьютере

- При измерениях на ИВП значения характеристик измеряемого объекта могут быть существенно искажены по сравнению с их значениями, свойственными исследуемому объекту



Измерительные процессы контролируются физическими законами со свойственными им ограничениями и запретами

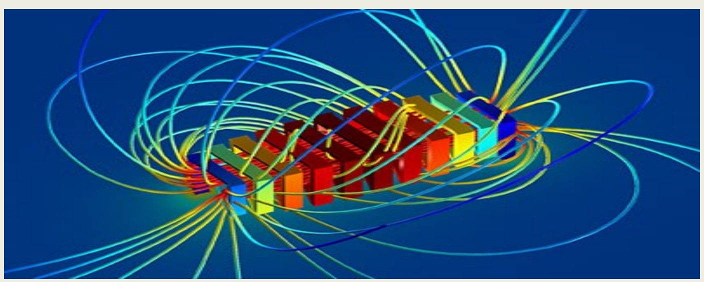


+

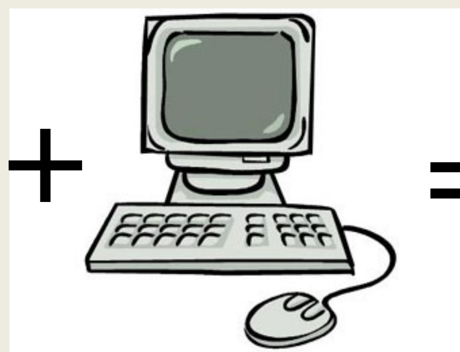
= ?

+

= ?



+



= ?

Свойства ИВП как измерительного прибора определяются законами иной природы – как физической, так и математической.

# Принципы теории ИВП

Способ конструирования измерительных преобразователей

$\neq$

Способ конструирования измерительных преобразователей в составе ИВП

- Требования к характеристикам ИП, обеспечивающим максимальную точность синтеза на ИВП выходного сигнала идеального ИП, существенно отличающиеся от требований к характеристикам ИП, обеспечивающим его высокое качество как средства измерения того же назначения.

# Принципы теории ИВП

- Распространенные методы «обработки» данных измерений типа методов наименьших квадратов и их регуляризированных вариантов, максимальной энтропии и т. п. не могут служить основой теории ИВП как средства измерения, поскольку не позволяют синтезировать сигнал *Ug*, не гарантируют максимальной точности оценивания сигнала *g* и не позволяют определить параметры ИП, при которых максимальная точность ИВП как средства измерений достигается.

$$\inf_{g}\left\|\xi - Ag\right\|^{2} + \ldots$$

Метод МНК

$$\inf_{R}\left\|R\xi - Ug\right\|^{2}$$

Метод теории ИВС

# Морфологический анализ изображений и сигналов

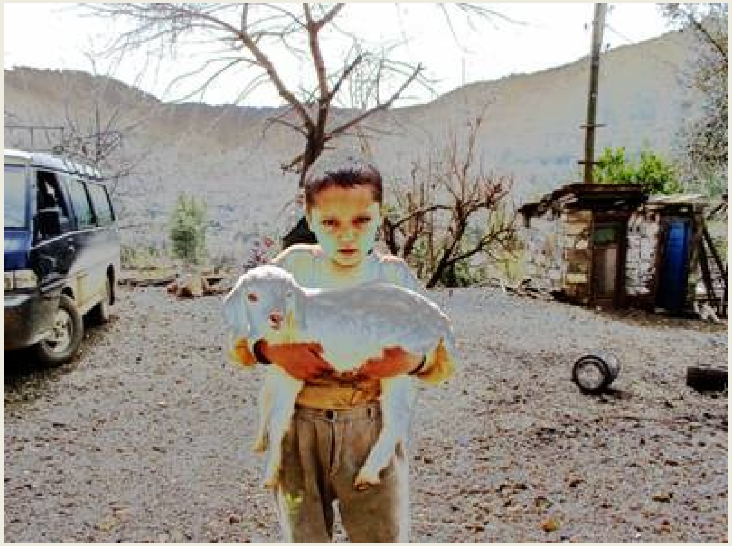
# Что такое методы морфологического анализа

- Методы решения задач узнавания, классификации объектов, оценки параметров объектов, выделения различия в сценах по их изображениям (сигналам). Основаны на понятии формы сигнала.

# Что такое форма

- Неформально – это то, что присутствует во всех изображениях данной сцены или объекта не зависимо от условий их регистрации

# Что такое форма

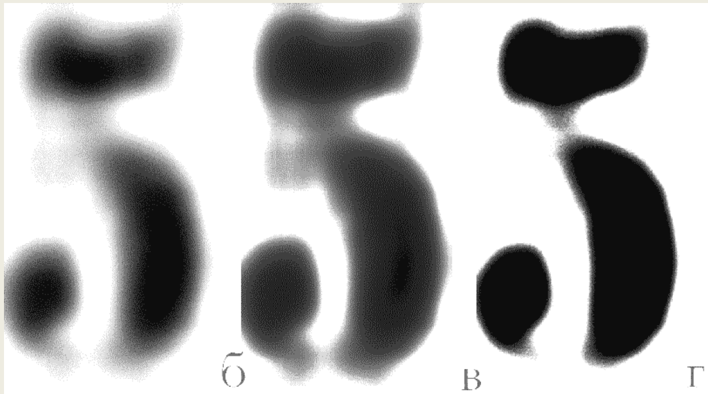


**На изображениях представлена одна и та же сцена, но яркости** $f_i(x)$**,** $i$**=1,2, различны в каждой точке** $x$ **поля зрения. Неизменна форма, определяемая как инвариант преобразований яркости изображения, моделирующих изменение условий его регистрации.**

# Пример 1

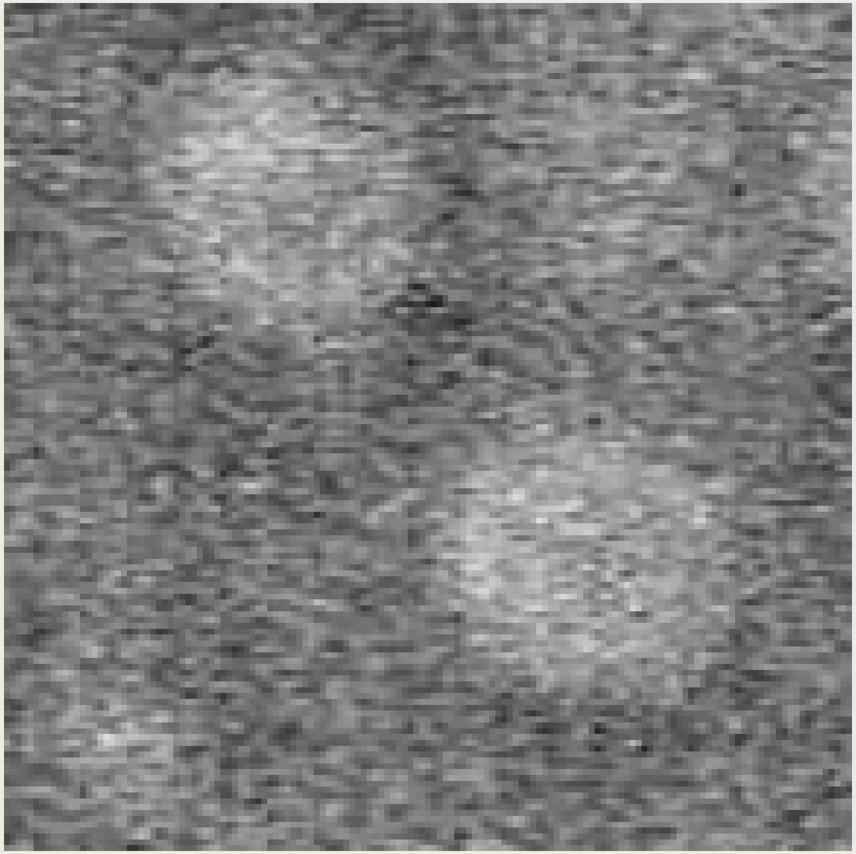
**Сцены отличаются наличием предмета – на правом изображении отсутствует бочка в левой нижней четверти поля зрения.**

# Пример 2


**Как узнать, где на поле зрения расположены изображения цифры «5»?**

# Пример 3

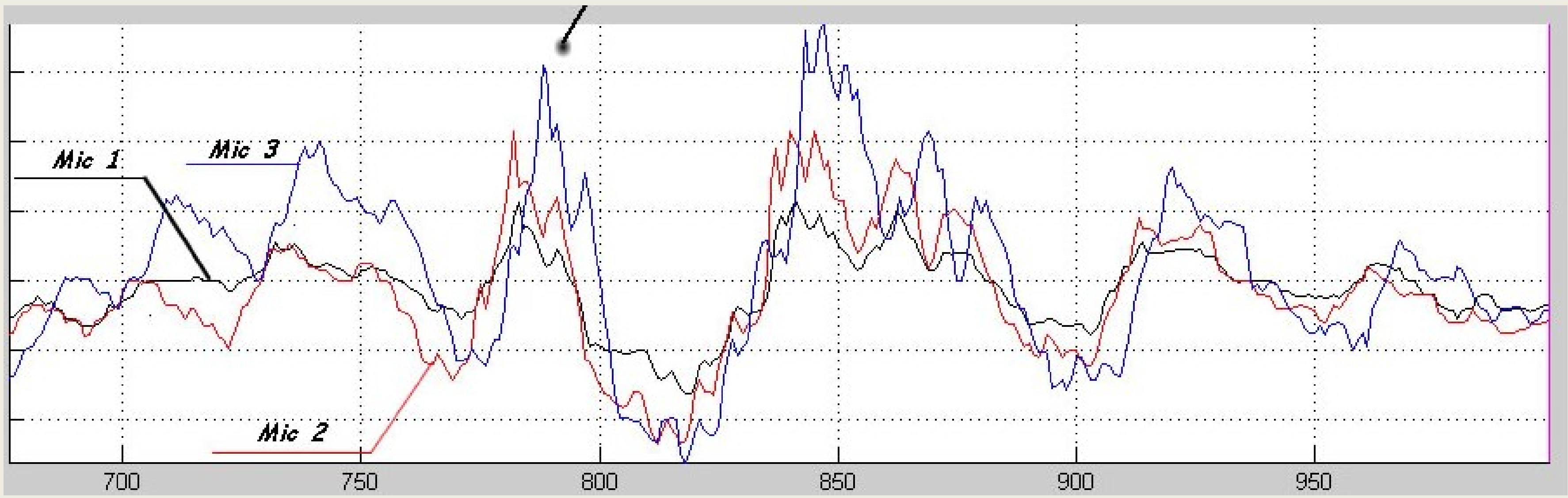


**Как оценить координаты центров и размеры кремниевых наноструктур?**

# Пример 4

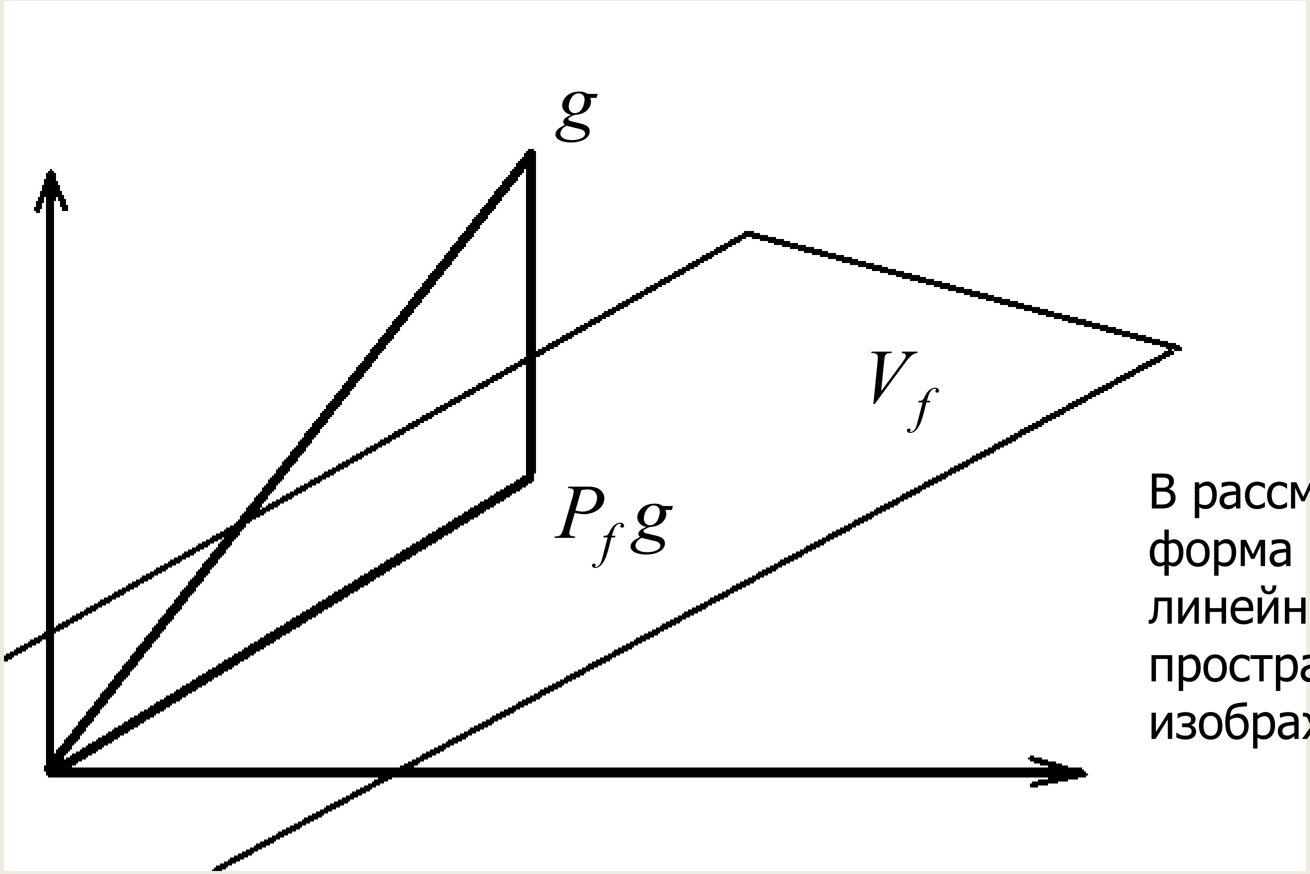
**Как выделить границы областей поля зрения, отличающихся цветом?**

# Пример 6



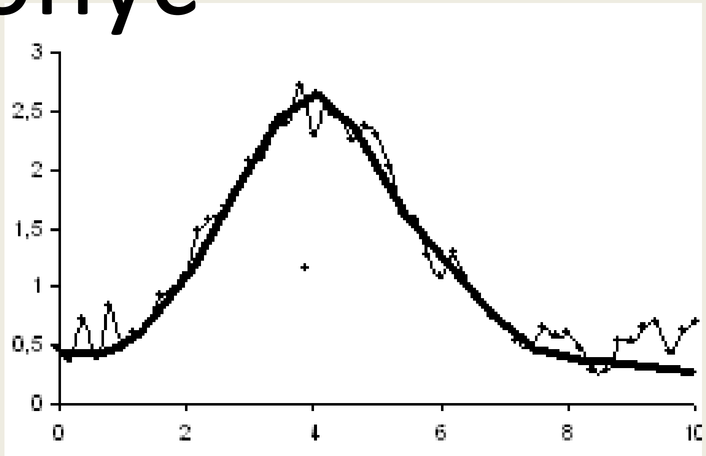

**Как совместить участки различных кривых?**

# Геометрическая интерпретация формы кусочно-постоянного изображения

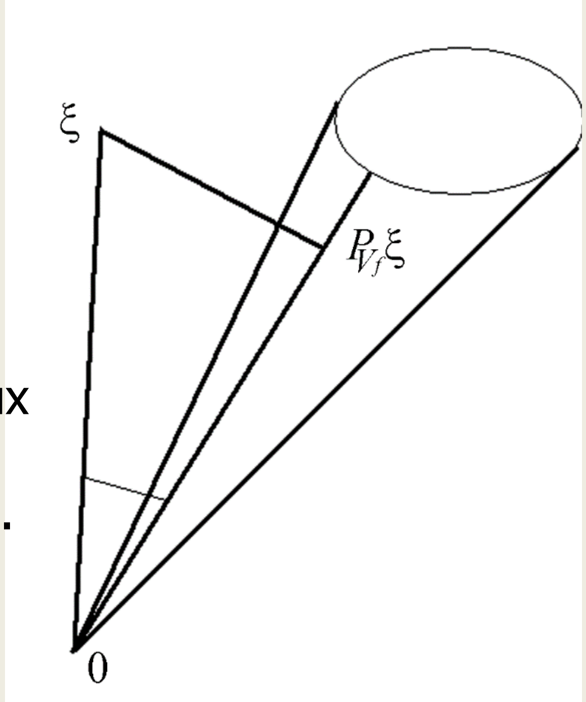



В рассмотренном случае форма изображения есть линейное подпространство пространства всех изображений.

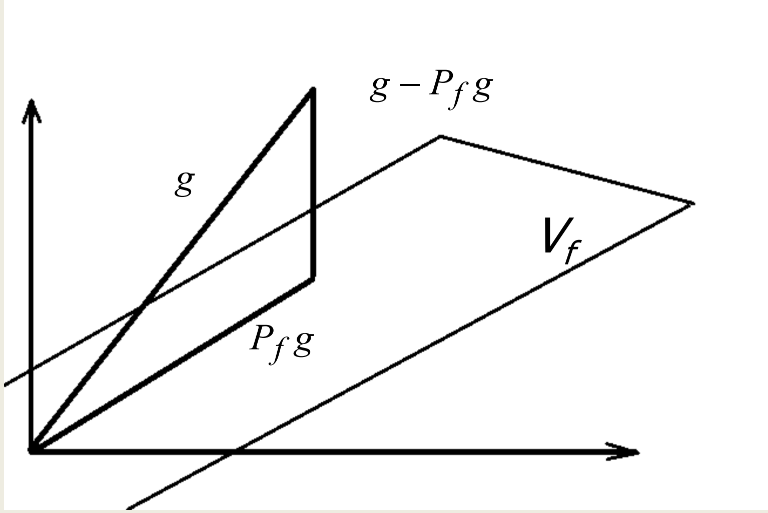
# Форма как конус




Если $\Phi$ - класс монотонных функций, то форма - выпуклый конус в пространстве всех изображений. При такой модели сохраняется упорядочение значений яркости изображения (амплитуды сигнала), при таких преобразованиях сохраняются локальные максимумы и минимумы.



# Выделение отличий в форме

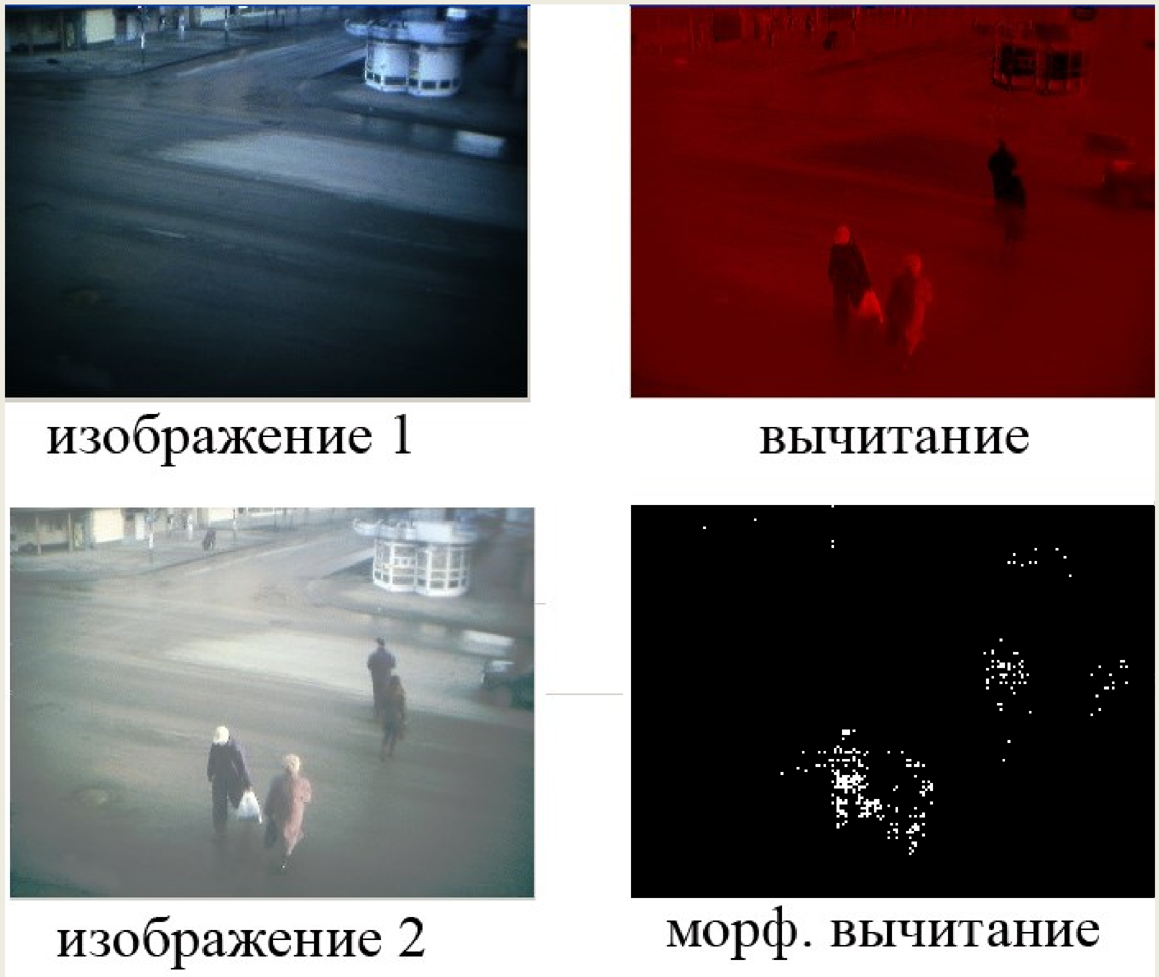



$P_f$ - проектор на множество $V_f$ изображений.

$P_f g$ - наилучшее приближение изображения $g$ изображениями из $V_f$.

$g - P_f g$ - все, что отличает $g$ по форме от $f$.

# Выделение отличий в форме



# Выделение отличий в форме




Слева направо:

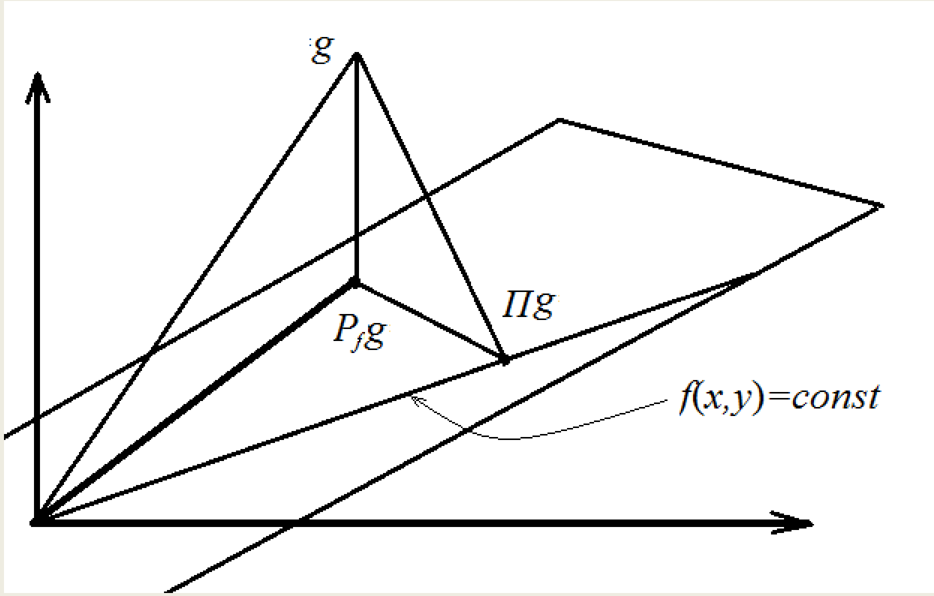
Исходное изображение

Изображение с «мешающим объектом»

Область поля зрения, занятая «мешающим объектом»

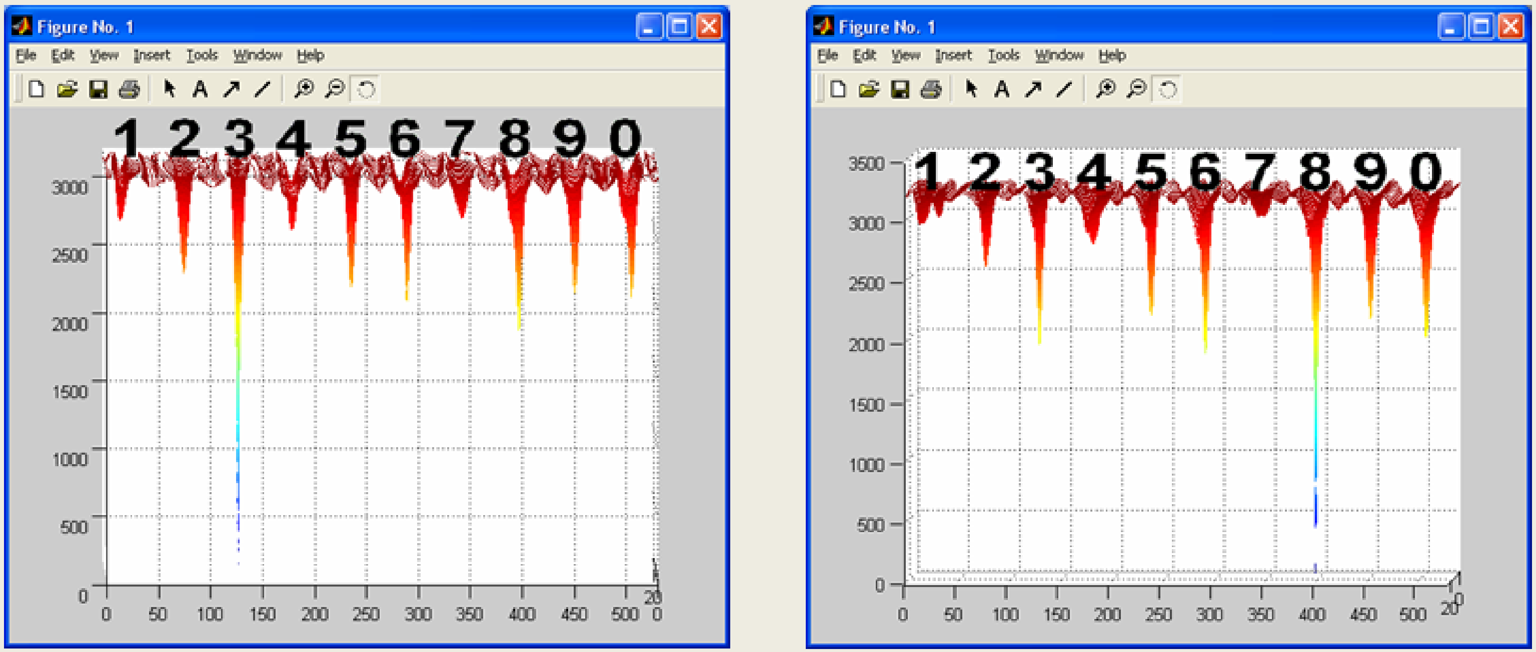
Результат вычитания первого изображения из второго

# Узнавание изображений заданной формы



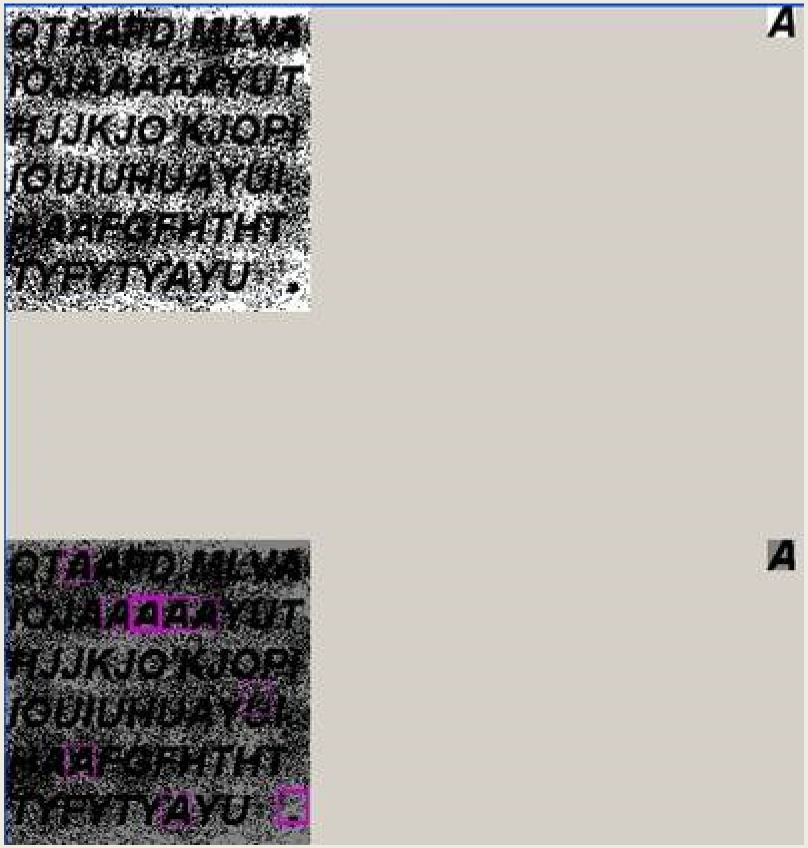

Правило узнавания: $g$ - предъявленное изображение. Обозначим $\Pi$ - проектор на множество изображений, равных константе. Тогда $P_f g - g$ - то, что отличает $g$ от $f$ по форме, $\Pi g - P_f g$ - то, что отличает проекцию $P_f g$, имеющую форму $f$, от константы. Дробь $t(g) = \dfrac{\left\| g - P_f g \right\|^2}{\left\| \Pi g - P_f g \right\|^2}$ тем меньше, чем отличие $g$ от $f$ по форме, и чем больше отличие $P_f g$ от константы; величина $t(g)$ не меняется при замене $g \to F \circ g$.

# Узнавание изображений




Графики $t(g)$ при сравнении формы подвижного фрагмента изображения по изображению ряда цифр в зависимости от сдвига фрагмента по полю зрения. Слева – фрагмент имеет форму цифры «3», справа – форму цифры «8».

# Поиск изображения буквы «А»



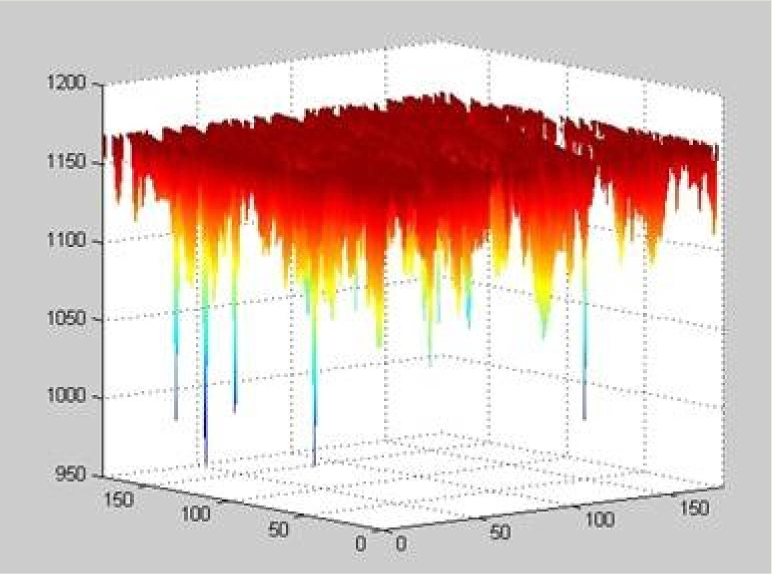
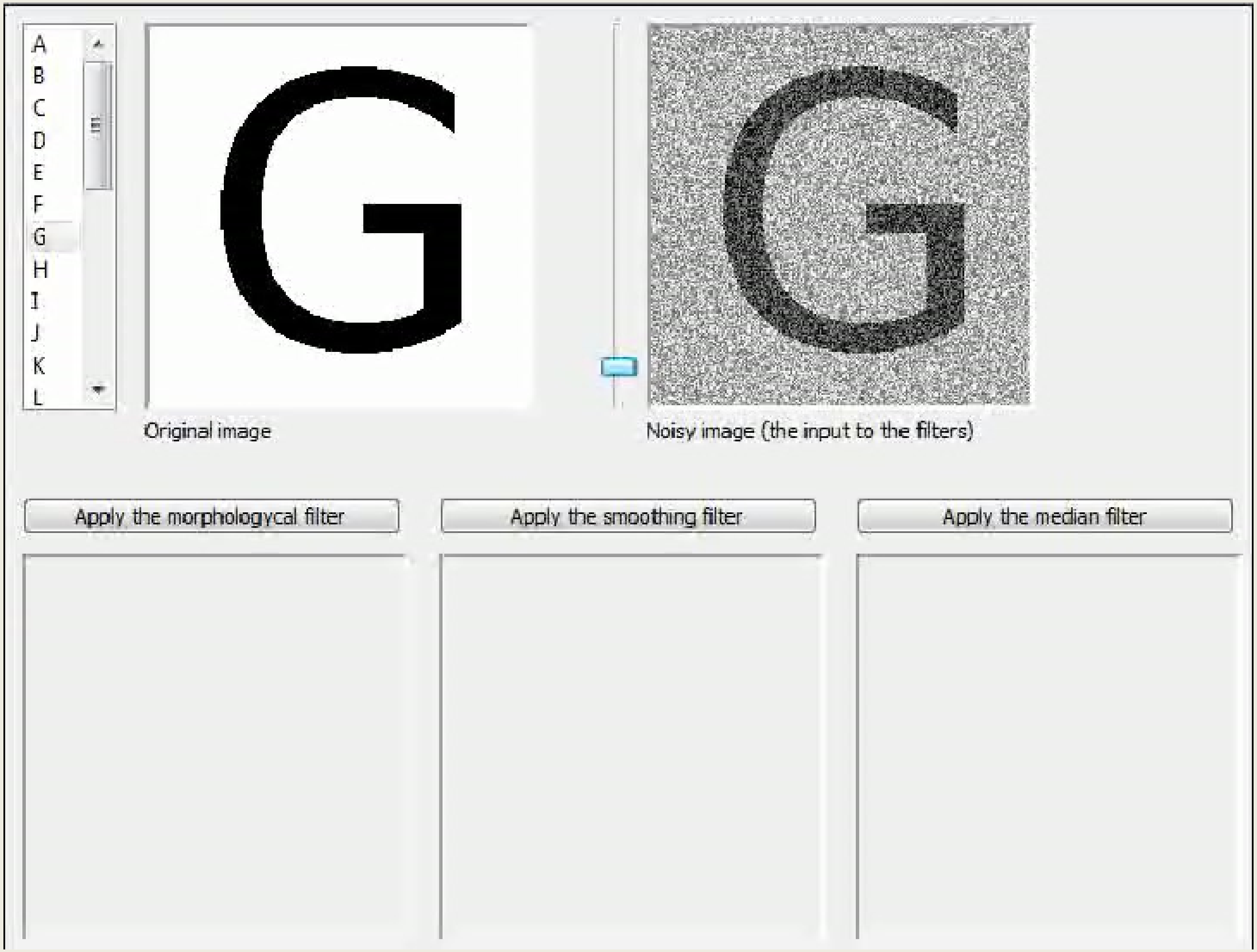



График $t(g)$ в зависимости от положения фрагмента изображения буквы «А» на поле зрения.

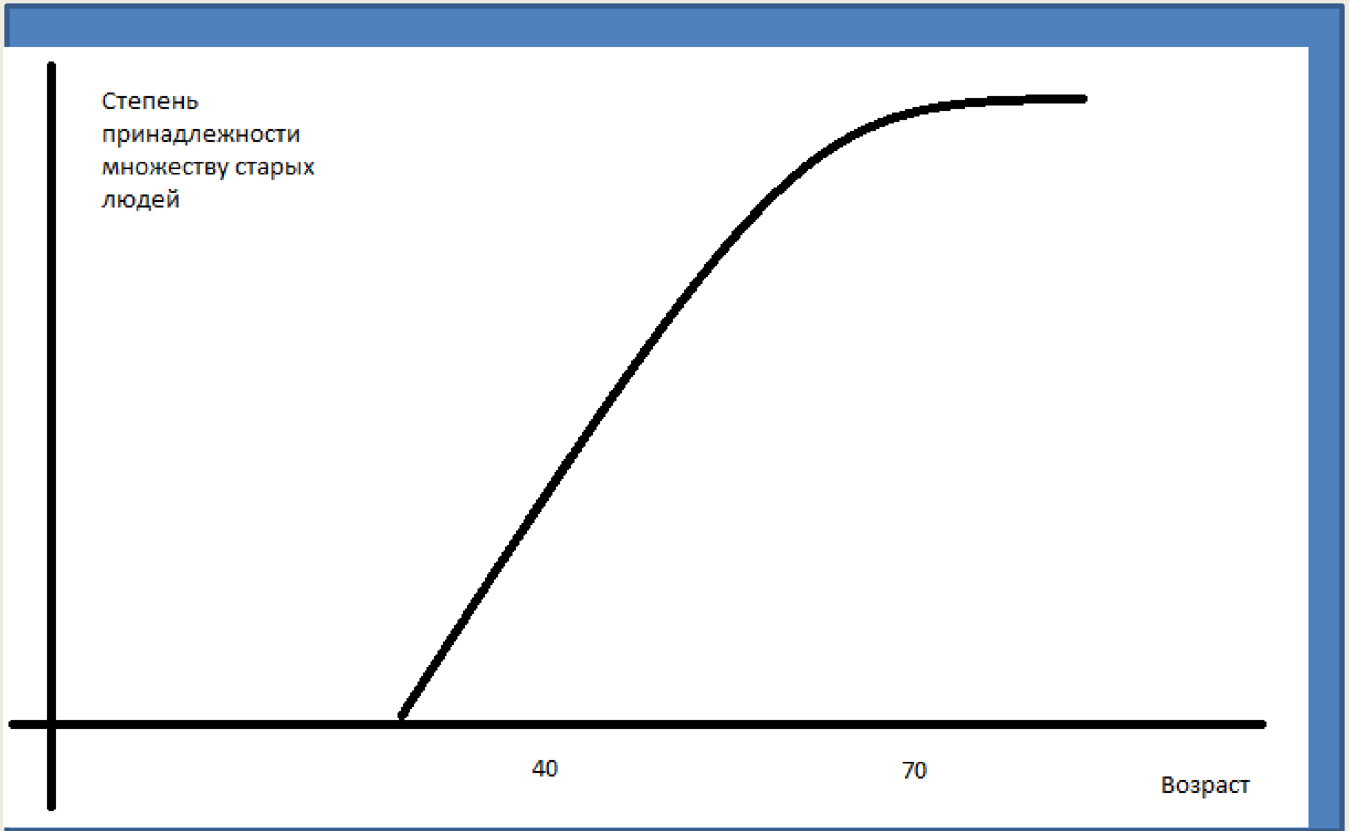
# Морфологическая фильтрация изображений



# Возможность
# как альтернативная
# вероятности
# модель

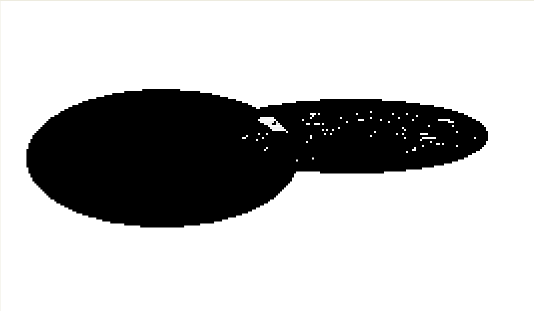
# Возможность

- Возникла из потребностей описания нечетких объектов нестохастической природы.
- Пример – нечеткие множества Л.Заде.

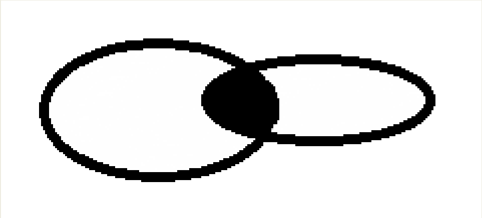


# Операции над «четкими» множествами

$\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$ в противном случае



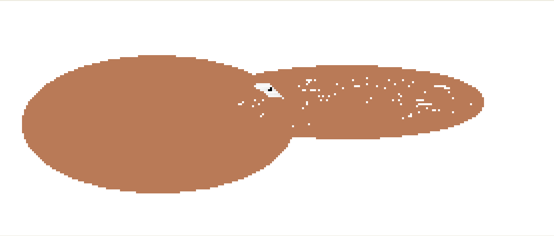
$\chi_{AUB}(x)=\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$



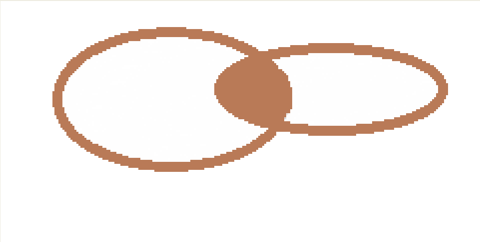
$\chi_{AB}(x)=\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$

# Операции над нечеткими множествами

$\mu_A(x)$ принимает значение на [0,1] и выражает «степень принадлежности» точки x множеству A.



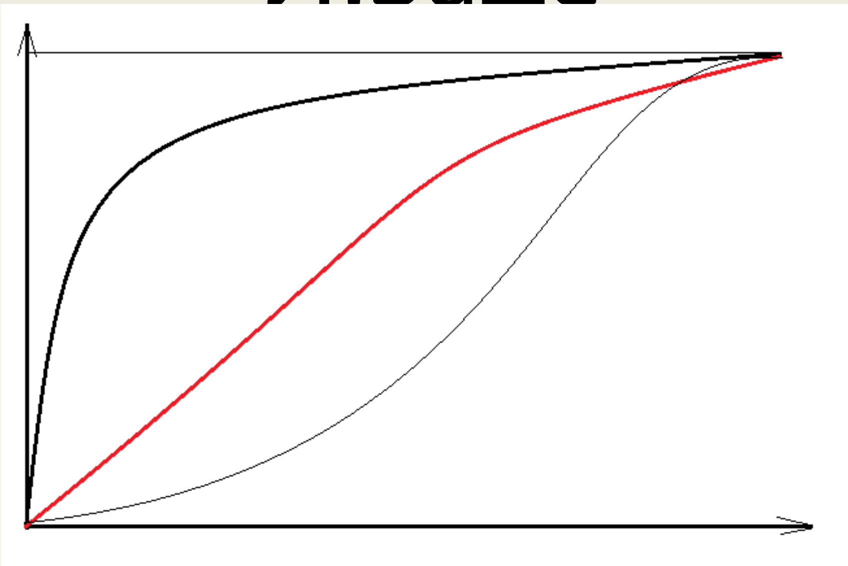
$\mu_{AUB}(x)=\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$



$\mu_{AB}(x)=\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

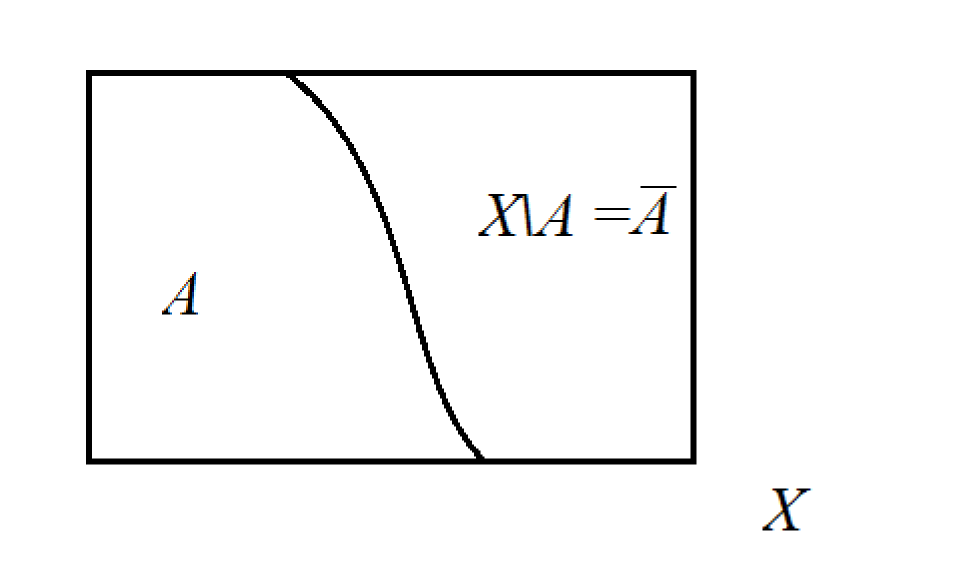
Откуда брать значения $\mu_A(x)$?

# Проблемы теории возможностей Л.Заде



- Степень принадлежности элемента множеству задается субъективно. Возникает проблема согласования вариантов степени принадлежности, построенных разными исследователями.

# Проблемы теории возможностей Л.Заде




В теории Заде $\mu_X(x)=1$, $\mu_{\varnothing}(x)=0$, хотя

$$\mu_{(X\backslash A)\cup A}(x)\le 1,\ \ \mu_{(X\backslash A)\cap A}(x)\ge 0,$$

то есть, вообще говоря, $(X\backslash A)\cup A \ne X$, $(X\backslash A)\cap A \ne \varnothing$.

# Теория возможностей Ю.Пытьева

- Если природа нечеткости стохастическая, то вероятности событий можно оценить по результатам наблюдений частоты.
- Если вероятность непредсказуемо меняется от испытания к испытанию, то вероятностная модель эксперимента принципиально не восстанавливается.

# Теория возможностей Ю.Пытьева

- Введем меру возможностей как характеристику упорядоченности шансов появления событий.
- Будем считать, что если вероятность Pr (A) события A не меньше, чем вероятность Pr (B) события B, то возможность P (A) события A также не меньше, чем возможность Pr (B) события B.
- При этом значения вероятностей могут произвольно меняться, сохраняя лишь упорядоченность.
- Соответственно, в теории возможностей ее значения не важны, а важна лишь упорядоченность возможностей событий

# Теория возможностей Ю.Пытьева

- Для задания возможности не требуются значения $P(A_1)$, $P(A_2)$, . . ., достаточно лишь знать, как они упорядочены.
- В рамках теории возможности содержательными являются утверждения: «более возможно», «менее возможно», «равновозможно».
- Этого достаточно для решения задач оптимизации

# Вопрос: как устроена шкала значений возможностей, в частности, как определить операции сложения и умножения возможностей?

Для любой монотонной функции (сохраняющей упорядоченность) потребуем:

- $\gamma\,(a * b) \Longleftrightarrow \gamma(a) * \gamma(b)$, $\gamma(a+b) = \gamma(a)+\gamma(b)$,
- $\gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b)$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$,

где знак $*$ означает либо «<», либо «>», либо «=».

для любых $a, b \in [0, 1]$

- $a \bullet b = b \bullet a$, $0 \bullet a = 0$, $1 \bullet a = a$,
- $a+b = b+a$, $0+a = a$, $1+a = 1$,

тогда $a+b = \max(a, b)$, $a \bullet b = \min(a, b)$, $a, b \in [0, 1]$.

# Вариант теории возможностей (Ю.П.Пытьев)

- Возможность является мерой и строится по аналогии с вероятностной мерой.
- Возможность P(A) определена для каждого события и характеризует шансы наступления события А по сравнению с шансами других событий.
- Если P(A)=1, то событие А вполне возможно, если P(A)=0, - невозможно.
- Многие формулы теории возможностей получаются из формул теории вероятностей заменой бинарных операций:

a«**+**»b = max{a,b}; a«·»b = min{a,b};

# Вариант теории возможностей (Ю.П.Пытьев)

- Если вероятность непредсказуемо меняется от испытания к испытанию, то вероятностная модель эксперимента принципиально не восстанавливается, а возможностная модель (задающая конкретное упорядочение возможностей событий) восстанавливается ТОЧНО за КОНЕЧНОЕ число наблюдений с вероятностью единица (почти наверное).

# Вариант теории возможностей (Ю.П.Пытьев)

- Выше рассмотрена стохастическая модель возможности. Однако она может быть построена и как самостоятельная теория, позволяющая моделировать невероятностные неопределенности
- В частности, теорию возможностей можно применять для моделирования экспертных решений.

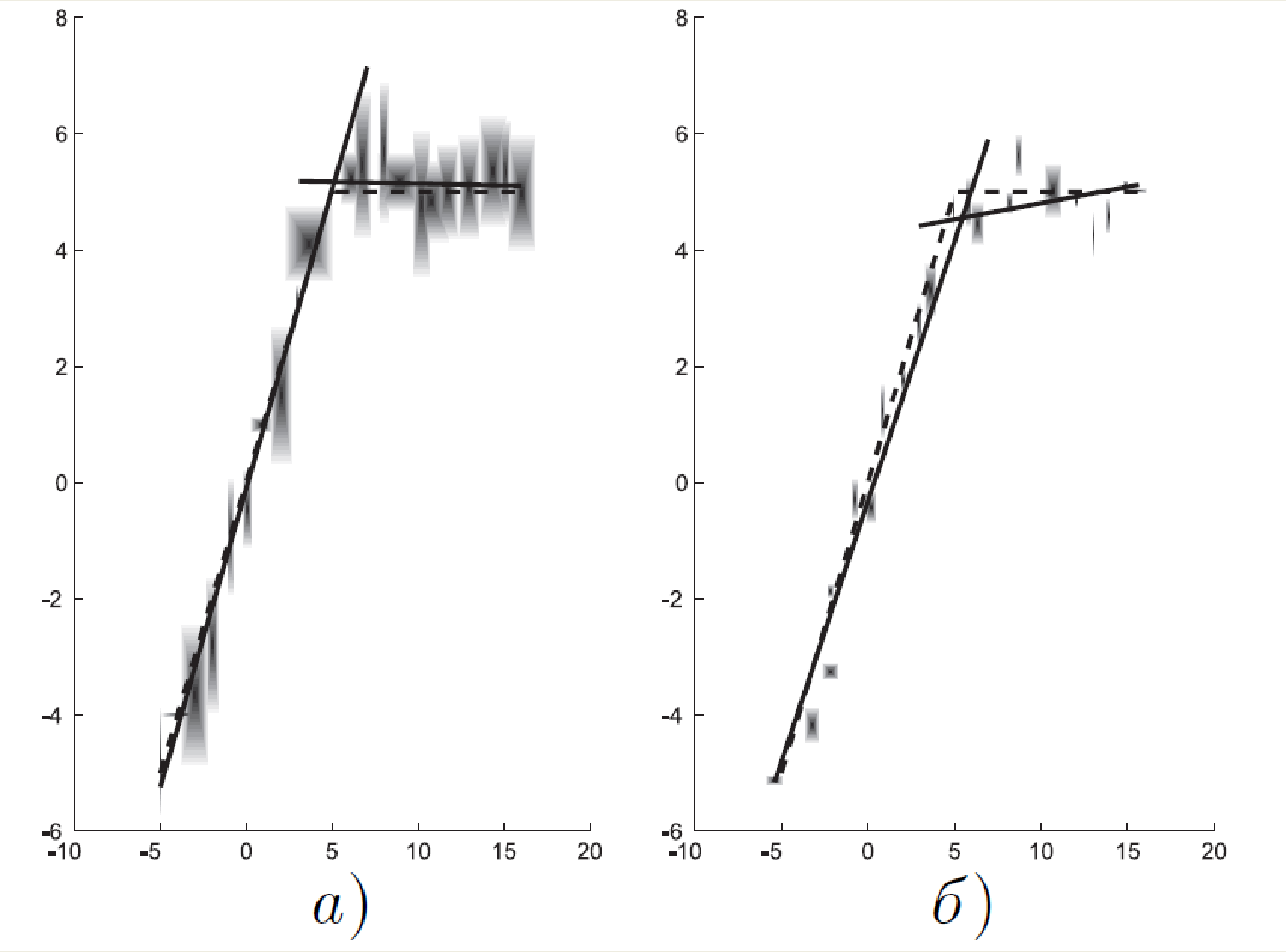
# Экспертное восстановление возможностей

- Эксперты могут оценивать возможности равенств $\xi = x_1, \dots, \xi = x_n$ в своих шкалах, но, поскольку решение, представляющее мнения всех экспертов, должно быть инвариантным относительно выбора их шкал, для построения коллективной экспертизы каждому эксперту следует оценить максимальный инвариант распределения возможностей - упорядоченность значений
- $p_j = P(\xi = x_j)$, $j = 1, \dots, n$,
- или, что то же самое,- соответствующую $(n+1)\times(n+1)$ матрицу попарных сравнений, определяющую класс эквивалентных распределений $\xi$.

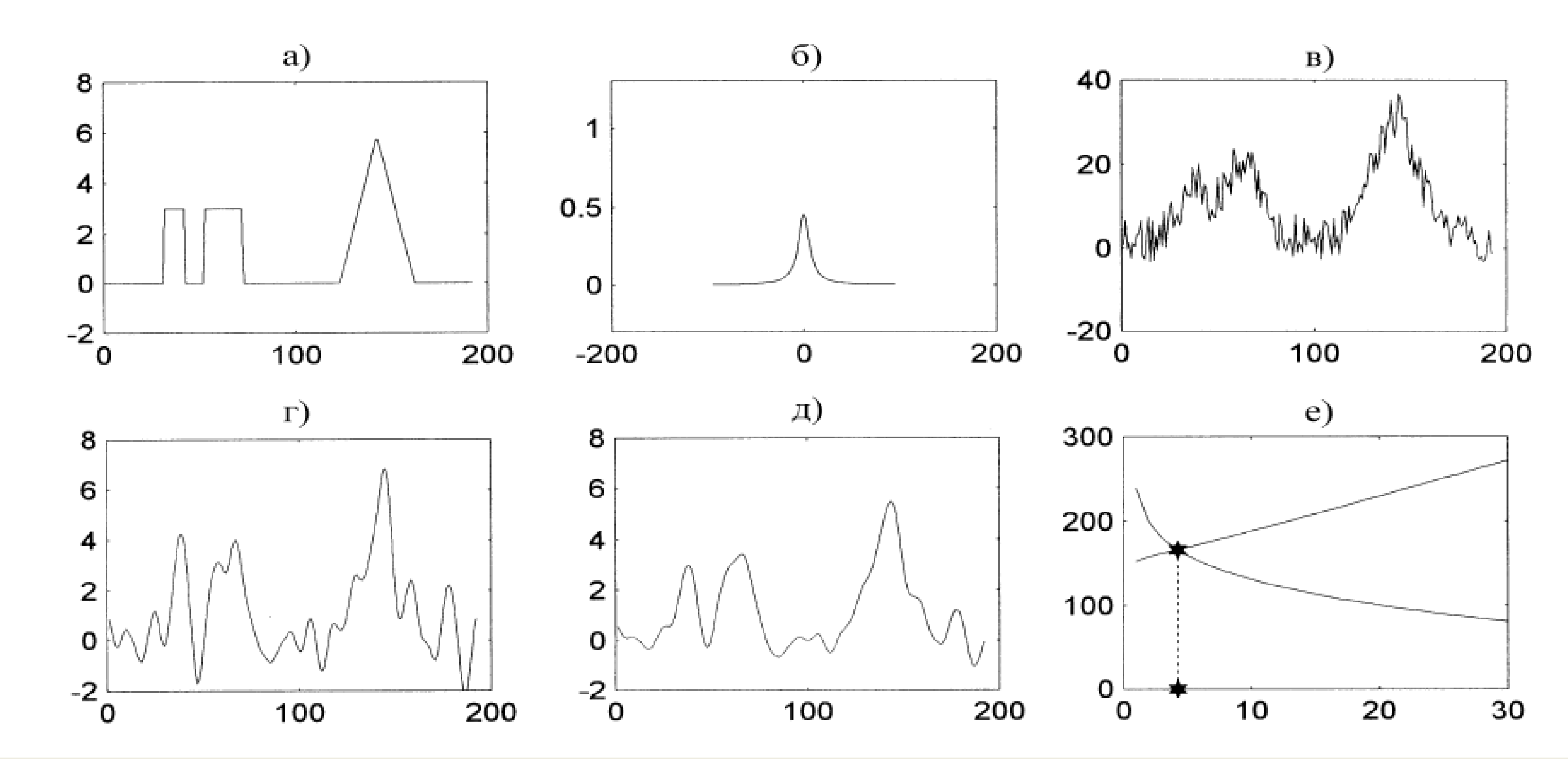
# Экспертное восстановление возможностей

- На основе набора матриц попарных сравнений, полученных от каждого эксперта определяется коллективная экспертиза, в известном смысле лучше других согласованная с мнениями всех экспертов, и с точностью до эквивалентности определяющую искомое распределение $\xi$.
- Дан метод, позволяющий определять, в каком случае полученной коллективной экспертизе доверять не следует, ибо их результаты согласуются с гипотезой, что  эксперты принимают решения наугад и взаимно независимо.

# Пример. Задача оценивания



# Пример. Задача оценивания



# Пример

| | |
|---|---|
|  | Initial image of the second level |
|  | Initial image of the fourth level |

**Fig. 1.** A 32 × 32 image used as the initial data.

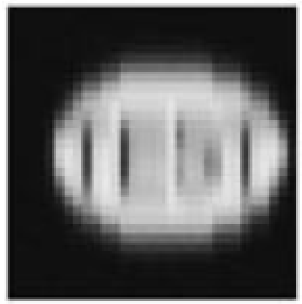
| | |
|---|---|
|  | Initial image |
|  | Diffuse image with noise $\sigma^2 = 0.1$ ((the hardware function is a rectangle) |
|  | Reconstructed image (possibility-theoretical reduction) |

**Fig. 2.** Reconstruction of an image by the method of possibility-theoretical reduction.

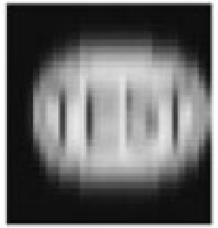
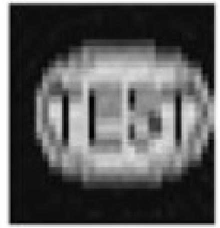
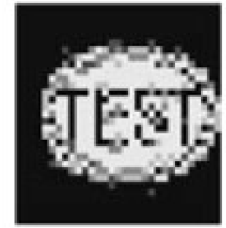
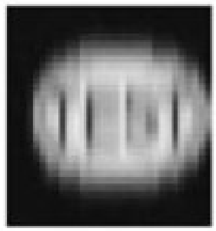
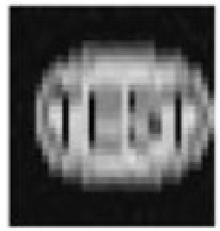
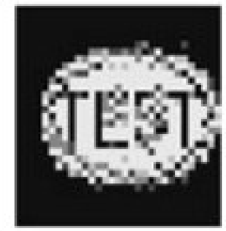
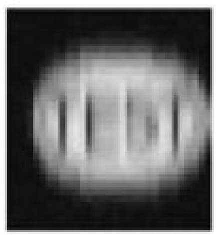
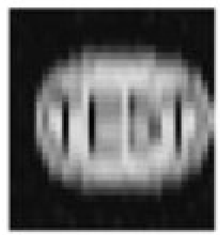
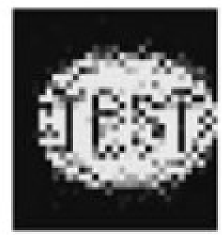
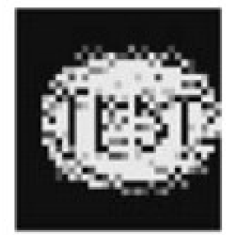
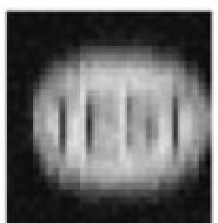
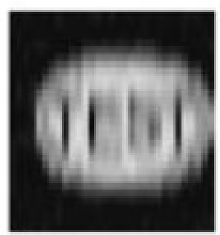
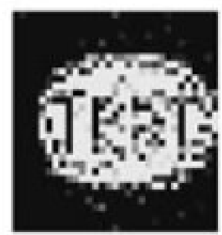
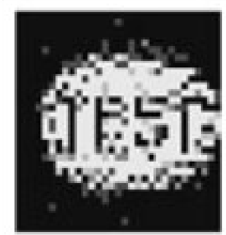
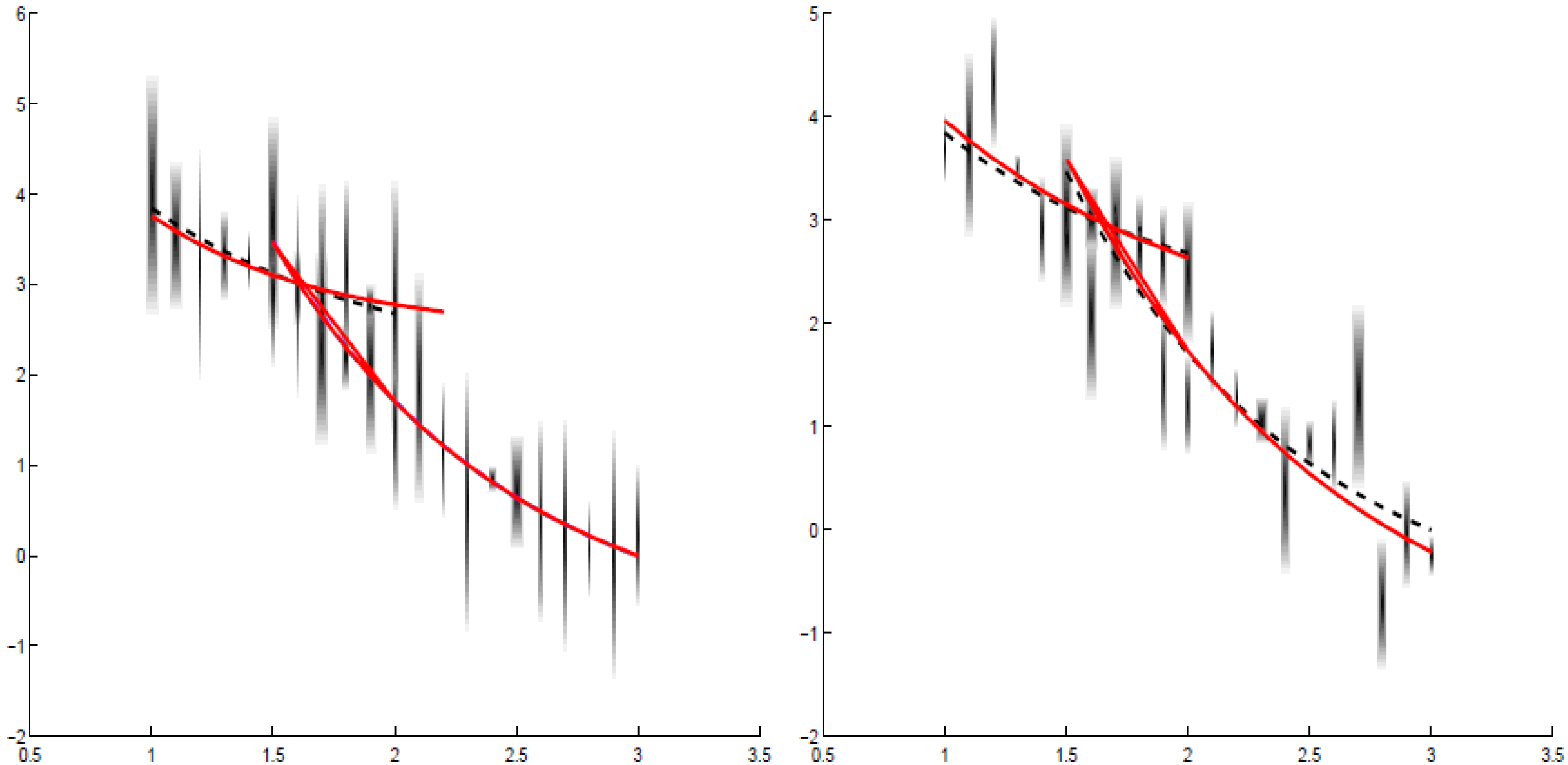
| Noise level (Gauss) $\sigma^2$ | Diffuse image with noise | Reconstructed image (stochastic reduction) | Reconstructed image (possibility-theoretical reduction) | Reconstructed image (discrete possibility--theoretical reduction) |
|---|---|---|---|---|
| 0.25 |  |  |  |  |
| 0.50 |  |  |  |  |
| 1.00 |  |  |  |  |
| 2.00 |  |  |  |  |

**Fig. 5.** Results of the numerical experiment with a Gaussian hardware function for a four-level image.

# Пример – восстановление функциональной зависимости




Результат численного моделирования восстановления кусочно-экспоненциальной функции $f_1(x) = 5e^{-x} + 2, x = \{1, 1.1, \ldots, 1.9, 2\}$, $\quad f_2(x) = 20e^{-x} - 1, x = \{1.5, 1.6, \ldots, 2.9, 3\}$

Спасибо за внимание!